سیگنال‌ها و سیستم‌ها

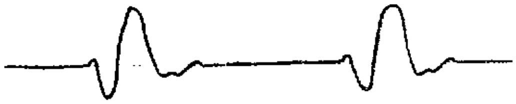
* مقررات:
- تأخیر در حضور
- غیبت در امتحانات
- کوئیزهای اعلام نشده
- تمرینات کامپیوتری MATLAB : انفرادی، source با توضیحات، ورودی و خروجی
- تلفن همراه
- ارائه تکالیف : Neatness ، انفرادی

* ارزیابی:
- میان‌ترم
- پایان‌ترم } ۷۰٪
- حل مسائل تشریحی
- پروژه‌های کامپیوتری } ۲۰٪
- کوئیز } ۱۰٪

* مراجع:

1. Signals & Systems by: A.V. Oppenheim, A.V. Willsky
2. Fundamental of Signals & Systems Using the WEB & MATLAB by: B.W. Kamen, B.S. Heck

* سیگنال‌ها حامل اطلاعات هستند.



☑ کاربرد پزشکی : ECG (نوار قلب)

— نوع بیماری

پردازش صوت : VOICE (تایید هویت)

— هویت فرد

— چه گفته است

— لهجه

P300

خواسته‌های مغز : BCI (Brain Computer Interface)

— سیگنال‌های مغزی EEG

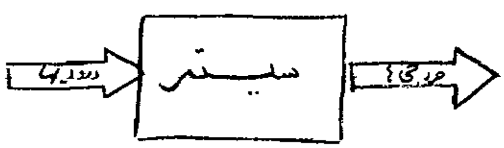
— دروغ سنجی

— FMRI ← Functional

* سیگنال : امواج

پردازش : اعمالی که روی سیگنال انجام می‌دهیم.

* سیستم : مجموعه‌ای شامل یک یا چند ورودی و یک یا چند خروجی



☑ قلب :

— ورودی : تحریک الکتریکی

— خروجی : جریان خروجی خون

اقتصادی :

— ورودی : عامل‌های دخیل (رشد جمعیت ، سوانح ، ...)

— خروجی : تاثیر روی وضع اقتصادی

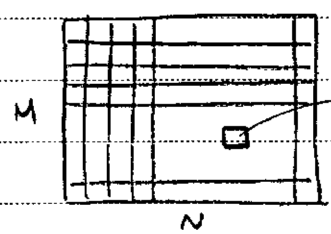
Subject:
Year. Month. Date.

* انواع سیگنال‌ها از لحاظ بُعد

- 1-D تعداد متغیرهای مستقل = 1
- 2-D 2
- n-D n

1-D ← $v(t)$, $x(t)$

2-D ← Image : دوبعدی زمان گسسته



$x[M,N]\Big|_{i,j} = h$

- رنگ‌آمیزی تصویر
- ردیابی ... وسایل متحرک (نشانه روی از روی تایر ....)

* انواع مسائل مطرح

• System

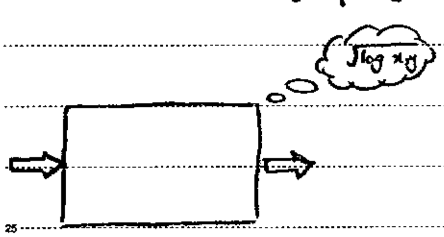
هدف: مشخصه‌بندی رفتار در ازای ورودی‌های مختلف

• Design

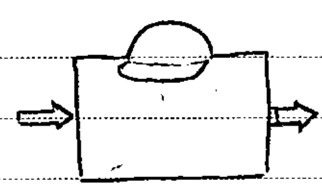
هدف: طراحی سیستم برای داشتن مشخصه خاص

• System + System 2

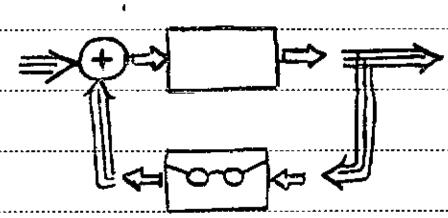
هدف: طراحی سیستم ثانویه برای تغییر مشخصه سیستم اولیه (feedback)



System



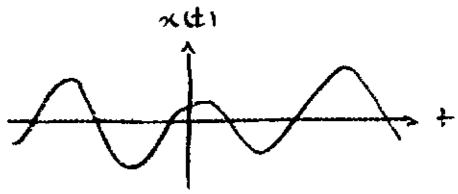
Design



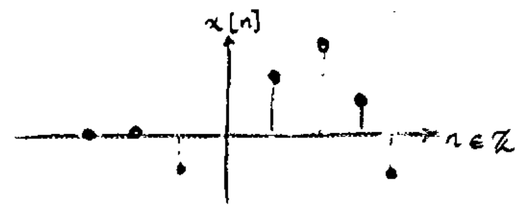
Feedback

* انواع سیگنال از لحاظ زمان

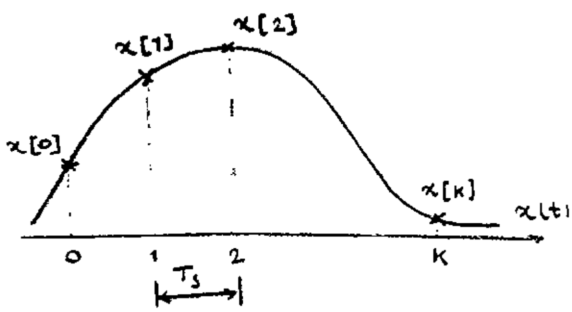
1. Continuous - Time (CT) $\longrightarrow x(t) \; , t \in \mathbb{R}$
2. Descrete - Time (DT) $\longrightarrow x[n] \; , n \in \mathbb{Z}$



CT



DT



CT $\Rightarrow$ DT : Sampling

Ts : Sampling Period

$x(t) \Rightarrow$ A/D $\Rightarrow x[n]$

MATLAB

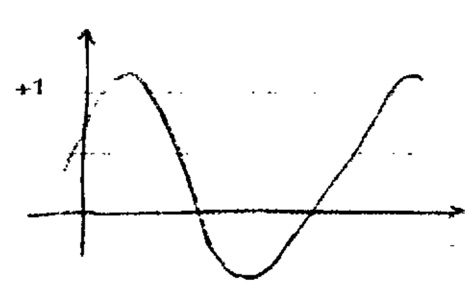
$x(t) = e^{-0.1t} \sin\left(\frac{2t}{3}\right) \quad , 0 < t < 30 \quad , \text{interval} = 0.1$

```
t = 0 : 0.1 : 30
x = exp(-0.1 * t) .* sin(2/3 * t)
axis([0  30  -1  1]);
plot (t, x)
grid
ylabel ('x(t)')
xlabel ('t')
```

for t = 0 → 30 step 0.1

ضرب نقطه‌ای ، element wise .*

مثل « ; » نباشد روی مانیتور چاپ می‌کند

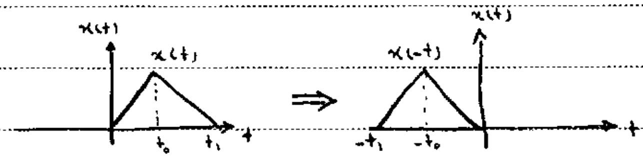


* تبدیلات روی متغیرهای مستقل (Transformation):

I) Reflection (معکوس کردن)

$x(t) \longrightarrow x(-t)$

$x[n] \longrightarrow x[-n]$



دوران حول محور عمودی

II) Time-Shifting or Translation (جابجا کردن زمان)

$x(t) \longrightarrow x(t-t_0)$

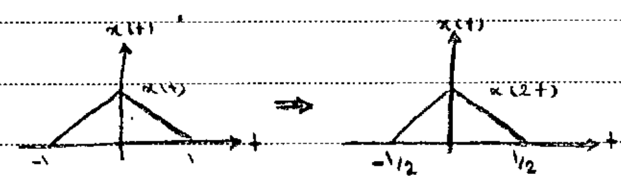
$x[n] \longrightarrow x[n-n_0]$

$\begin{cases} t_0 < 0 & \text{جابجایی به چپ} \\ t_0 > 0 & \text{جابجایی به راست} \end{cases}$

III) Time-Scaling (مقیاس بندی زمان)

$x(t) \longrightarrow x(at) \ , \ a \in \mathbb{R}$

$x[n] \longrightarrow x[an] \ , \ an \in \mathbb{Z}$

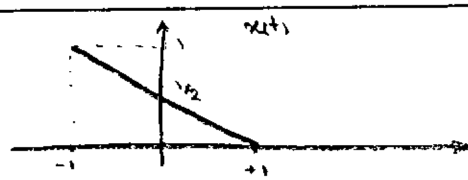


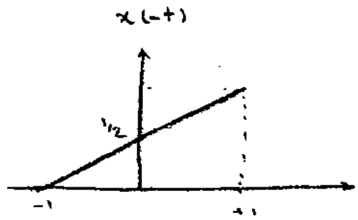
IV) Even / Odd (زوج / فرد)

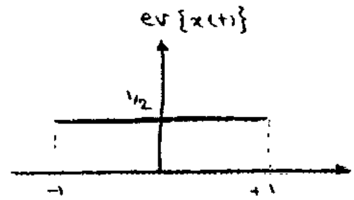
$\begin{cases} \text{Even}: & x(t) = x(-t) \\ \text{Odd}: & x(t) = -x(-t) \end{cases}$

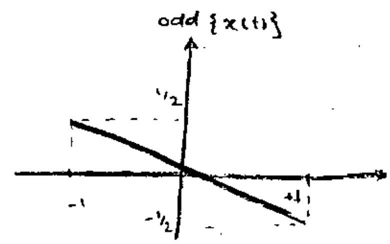
$\begin{cases} \text{Even}: & x[n] = x[-n] \\ \text{Odd}: & x[n] = -x[-n] \end{cases}$

any signal $\begin{cases} \text{جزء زوج}: & Ev\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \\ \text{جزء فرد}: & Odd\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\} \end{cases}$









$$\text{Signals}\begin{cases} \text{C.T.} & \begin{cases}\text{periodic}\\ \text{aperiodic}\end{cases} \\ \text{D.T.} & \begin{cases}\text{p.}\\ \text{ap.}\end{cases}\end{cases}$$

* $x(t)$ is periodic if : $x(t) = x(t+T)$, $\forall t$

کوچکترین عدد مثبت T برای آنکه ∀t را دوره تناوب گوییم (T_0)

T_0 : Fundamental Period

$x(t) = \cos(2\pi t) \longrightarrow T_0 = 1$

$\omega_0 = 2\pi / T_0$ فرکانس پایه سیگنال (Frequency)

* if $x_1(t)$ is periodic T_{0_1}
  if $x_2(t)$ is periodic T_{0_2} $\Rightarrow$ is $x_1(t) + x_2(t)$ periodic ?

$x(t) = x(t + T_0) = x(t + mT_0)$, $m \in \mathbb{Z}$.

$x_1(t) = x_1(t+T_{o_1}) = x_1(t+mT_{o_1})$

$x_2(t) = x_2(t+T_{o_2}) = x_2(t+nT_{o_2})$

$x_1(t) + x_2(t) = x_1(t+mT_{o_1}) + x_2(t+nT_{o_2})$

شرط پریودیک بودن : $x(t) = x(t+T_o)$ $\longrightarrow nT_{o_2} = mT_{o_1} = T_o$

$\Rightarrow \dfrac{T_{o_1}}{T_{o_2}} = \dfrac{n}{m}$ تنها زمانی که کسر $\frac{n}{m}$ گویا باشد نتیجه حاصل جمع پریودیک است.

$x_1(t) = \cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$

$x_2(t) = \cos\left(\dfrac{\pi t}{3}\right)$

$T_{o_1} = 4 \quad , \quad T_{o_2} = 6 \quad \Longrightarrow \dfrac{T_{o_1}}{T_{o_2}} = \dfrac{2}{3} \in \mathbb{Q}$

$x_1(t) + x_2(t)$ is periodic with $T_o = 12$

$x_i(t)$ is periodic with T_{o_i} , $i = 1, \dots, N$ تعمیم *

$\sum_{i=1}^{N} x_i(t)$ شرط پریودیک بودن سیگنال ورودی چیست؟

?

$x[n]$ is periodic if : $x[n] = x[n+N]$, $\forall n$, $N \in \mathbb{Z}$ *

N_o : smallest $\longrightarrow$ Fundamental Period

$x[n] = \cos(\Omega_o n + \theta)$

شرط پریودیک بودن : $\cos(\Omega_o(n+N) + \theta) \overset{?}{=} \cos(\Omega_o n + \theta)$

$\Omega_o N = 2\pi k \longrightarrow \boxed{\dfrac{\Omega_o}{2\pi} = \dfrac{k}{N}}$

$\cos(n/4) \longrightarrow \Omega_o = 1/4 \longrightarrow \dfrac{\Omega_o}{2\pi} = \dfrac{1}{8\pi} \notin \mathbb{Q} \longrightarrow$ پریودیک نیست

* سیگنال‌های زمان پیوسته معروف :

I) Complex Exponential (نمایی مختلط)

$x(t) = c \cdot e^{at}$

II . Complex Exponential ⇔ Sinusidal

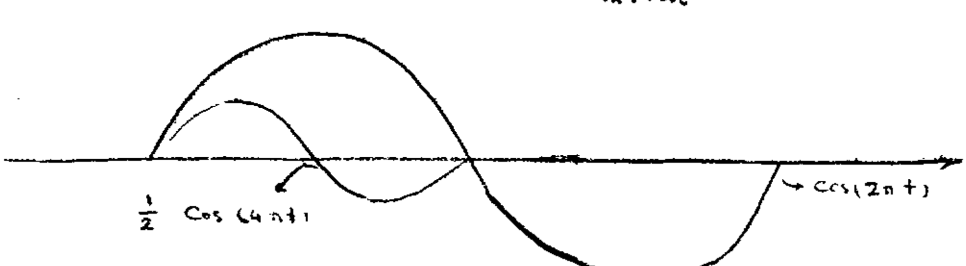
$a = j\omega_0 \longrightarrow x(t) = c \cdot e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$ اتحاد اویلر

با استفاده از زوج : $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\}$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) = A \cdot \mathrm{Real}\{e^{j(\omega_0 t + \theta)}\}$

$e^{j\omega_0 t}$ is periodic : $e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t + T_0)} = e^{j\omega_0 t + j\omega_0 T_0} = e^{j\omega_0 t + j2\pi}$

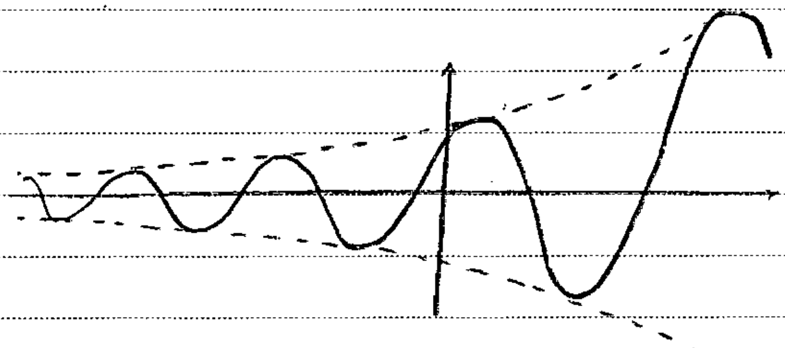
$e^{jk\omega_0 t}, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{|k| \cdot \omega_0}$



$a, c \in \mathbb{C} \Rightarrow c = |c| e^{j\theta}$

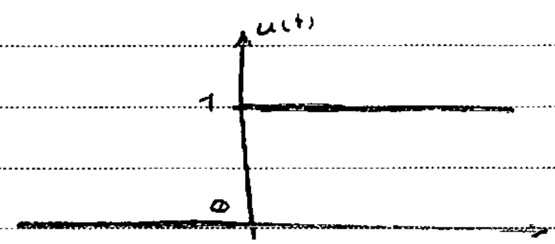
$a = r + j\omega_0$

$$C.E. \equiv x(t) = ce^{at} = (|C| e^{j\theta})(e^{(r+j\omega_0)t}) = \underbrace{(|C| e^{rt})}_{\text{نمایی}}\underbrace{(e^{j(\omega_0 t+\theta)})}_{\text{سینوسی}}$$

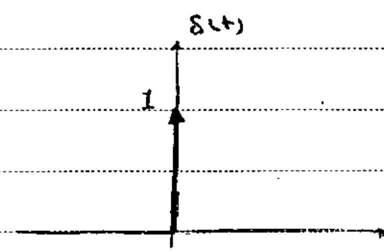


$r > 0$

III) Step Function & Unit Impulse



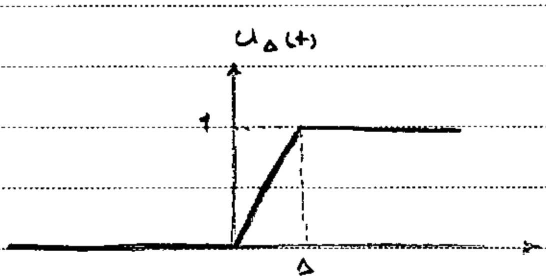
$\xrightarrow{\text{مشتق}}$

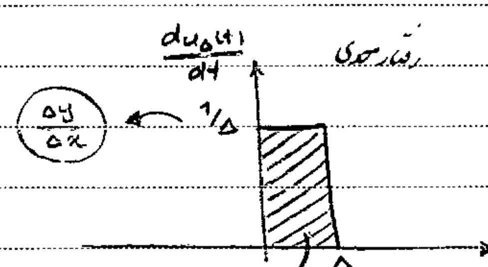


$$u(t) \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

$\delta(t) = \dfrac{du(t)}{dt}$

پرش : discontinuity : $t = 0$





$\Delta \times \frac{1}{\Delta} = 1 =$ مساحت

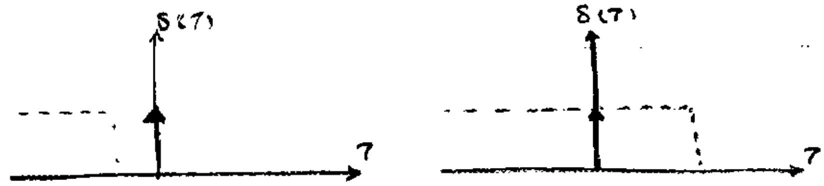
$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)$

$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \dfrac{du_\Delta(t)}{dt}$

• خواص تابع ضربه واحد

۱- بازگشت از δ به u

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,d\tau$$

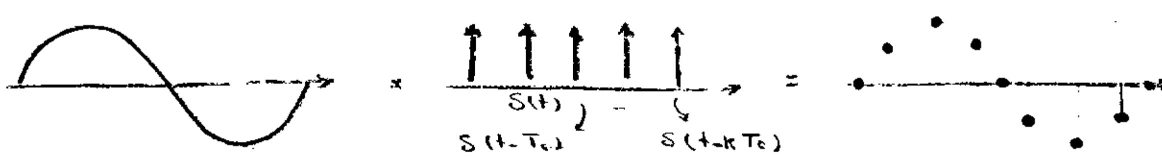


$t<0$, $u(t)=0$ $t>0$, $u(t)=1$

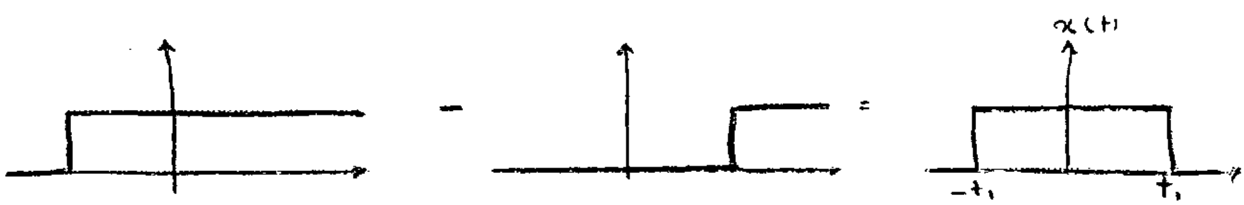
۲- خاصیت غربال (sifting)

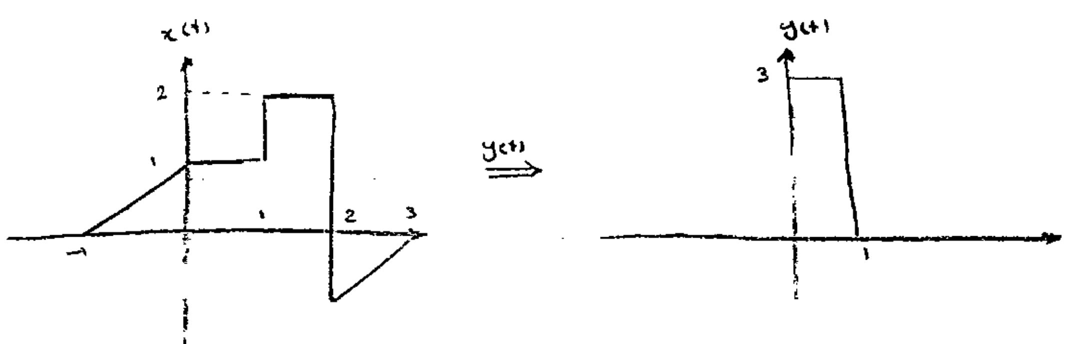
$$x(t).\delta(t)=x(0).\delta(t)$$

۳. $x(t).\delta(t-t_0)=x(t_0).\delta(t-t_0)$



۴. $x(t)=u(t+t_1)-u(t-t_1)$



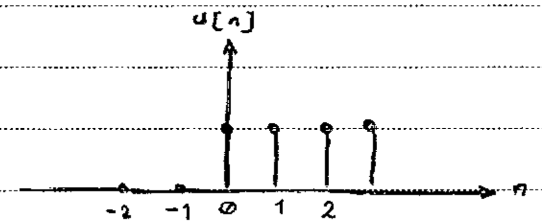


$$y(t)=[x(t)+x(2-t)]\,u(1-t)$$

* سیگنال‌های زمان گسسته معروف :

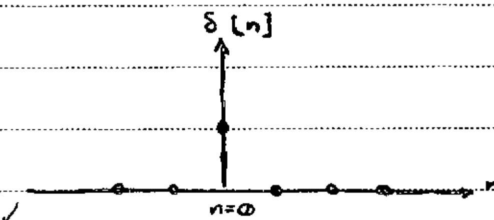
I) Unit Step

$$u[n] = \begin{cases} 1 & , n \geq 0 \\ 0 & , n < 0 \end{cases}$$



II) Unit Impulse

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



- $\delta[n] = u[n] - u[n-1]$ نوع زمان گسسته مشتق
- $u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m]$ نوع زمان گسسته انتگرال → ?

• خواص تابع پله واحد و ضربه واحد

۱- خاصیت غربال

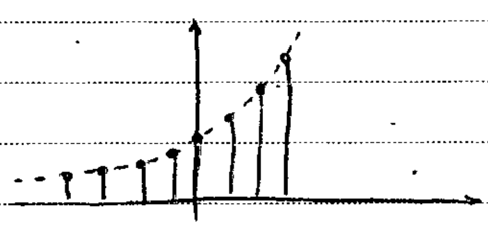
$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n]$$

$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0] \qquad \forall\, x[n]$$

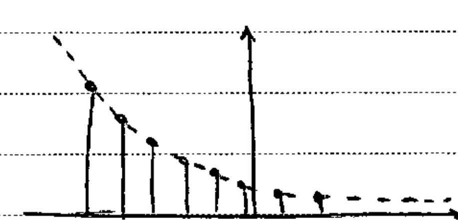
$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\,\delta[n-m]$$

III) Exponential

$$x[n] = C\cdot\alpha^{n} \quad , \quad C, \alpha \in \mathbb{C}$$

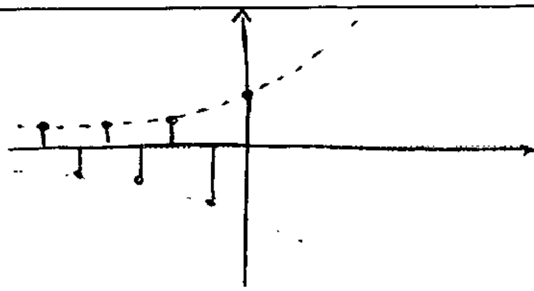


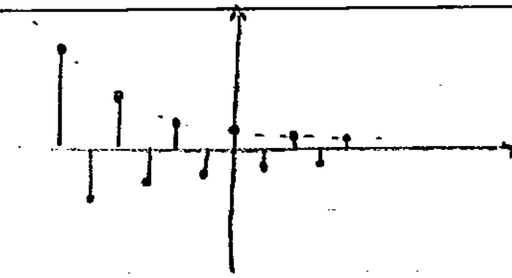
$\alpha > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$



$0 < \alpha < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Subject:
Year Month Date





$\alpha < -1 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$ $\qquad\qquad$ $-1 < \alpha < 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha = e^{j\beta}$

$x[n] = c \cdot e^{j\beta}$

$c = 1 \longrightarrow x[n] = \cos[\beta n] + j \cdot \sin[\beta n]$

$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$

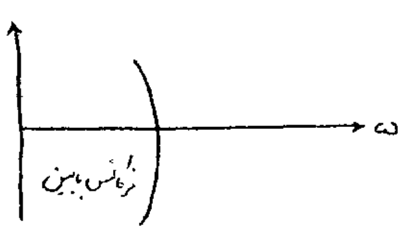
C.T
- فرکانس پایه ω_0
- افزایش ω_0 ← نرخ نوسانات سیگنال افزایش می یابد.
- متناوب است T_0 ← صرف نظر از اینکه ω_0 چه مقداری باشد.

$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j\Omega_0 n} \cdot e^{j2\pi n} = e^{j\Omega_0 n}$

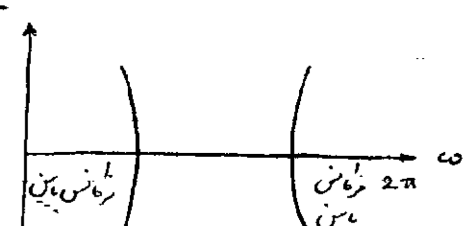
D.T
- Ω_0 افزایش : $0 \longrightarrow 2\pi$

$\Omega_0 : 0 \xrightarrow{\text{افزایش نرخ نوسانات}} \pi \xrightarrow{\text{کاهش نرخ نوسانات}} 2\pi$

C.T



D.T



Subject:
Year. Month. Date.

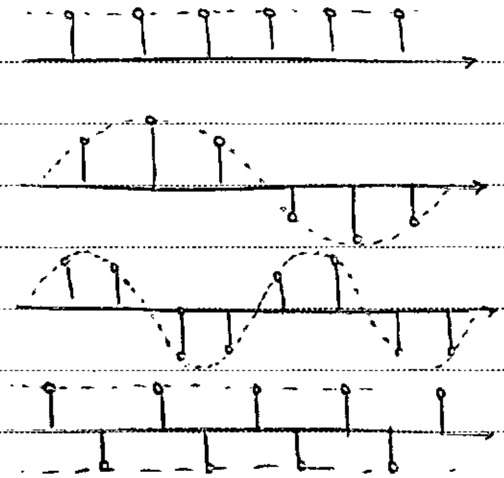
$\cos[\Omega_0 n]$

$\Omega_0 = 0$

$\Omega_0 = \frac{\pi}{6}$

$\Omega_0 = \frac{\pi}{3}$

$\Omega_0 = \pi$



$\Omega_0 = \pi + \frac{\pi}{6} \sim \Omega_0 = \pi - \frac{\pi}{6}$

$\Omega_0 = 2\pi \sim \Omega_0 = 0$

– شرط متناوب بودن

$e^{j\Omega_0 n} \overset{?}{=} e^{j\Omega_0 (n+N)}$

$\Rightarrow e^{j\Omega_0 n}\, e^{j\Omega_0 N} \longrightarrow 1$

$\Rightarrow \Omega_0 N = 2\pi m$

$\Rightarrow \boxed{\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \in Q}$ شرط متناوب بودن

N : periode $\qquad N_0 = \min\{N\},\ N>0$: Fundamental Period

$\frac{2\pi}{N}$: Frequency

– مجموعه سیگنالهای نمایی مختلط پایه

C.T.: $\{e^{jk\omega_0 t}\}$ $\quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

D.T.: $\{e^{jk\frac{2\pi}{N}n}\}$ $\quad K = 0, 1, \ldots, N-1$

$K = N \Rightarrow e^{jN(\frac{2\pi}{N})n} = e^{j2\pi n} = 1 \equiv k=0$

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$

$\Omega_0 = \frac{\pi}{8} \longrightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{16} \in \mathbb{Q} \longrightarrow N = 16$ پریودیک

$\frac{2\pi}{16}$ فرکانس پایه

$x[n] = \cos\left(\frac{n}{4}\right) \longrightarrow \times$

$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{16}\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{4}\right) \longrightarrow x[n] = \sim + \sim \longrightarrow \times$

Periodic a.p

تنها می‌توان را جمع به جمع دو تابع پریودیک نظر داد.

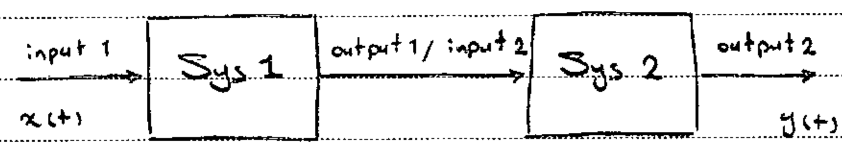
* سیستم : هر عاملی که شکل یک سیگنال را تغییر دهد سیستم می نامیم.

$x(t)$ $y(t)$: C.T.

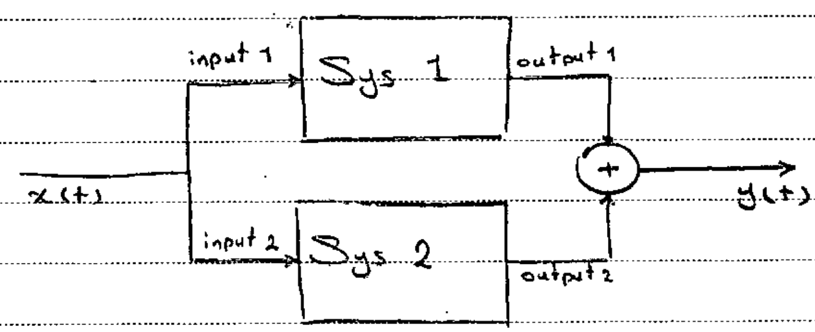
$x[n]$ $y[n]$: D.T.

* اتصال سیستم ها : سری (Cascade) ، موازی (Parallel)
ترکیب (Hybrid) ، پس خور (Feedback)

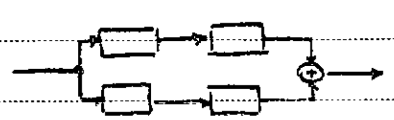
* اتصال سری :



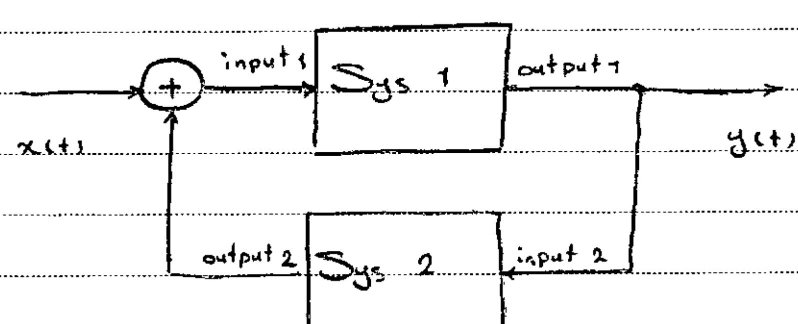
* اتصال موازی :



* اتصال ترکیب :



* اتصال پس خور :



* خواص سیستم : براساس رابطه خروجی / ورودی بیان می شود .

☑ میانگین گیری (نوع فیلترینگ) D.T. : $y[n] = \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k]$

I) Memory / Memoryless

بدون حافظه : خروجی سیستم به هر زمان وابسته به ورودی در همان زمان

☑ بدون حافظه $y[n] = \alpha \cdot x[n]$

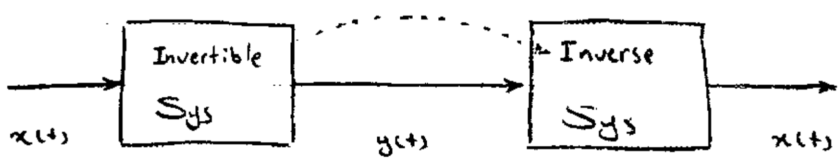
☑ مثال بالا به K عدد قبلی ربط دارد و دارای حافظه است .

II) Invertibility

وارون پذیر : با مشاهده خروجی بتوان ورودی سیستم را مشخص کرد .

☑ حذف لرزش دست از تصاویر

سیستم وارون : با ترکیب آن با سیستم اولیه باید سیگنال اولیه را بدست دهد .



☑ $y(t) = a \cdot x(t)$ ✓

$y(t) = \cos(x(t))$ × ⟶ چون معکوس آن یک به چند جواب است

III) Casuality

علی پذیری : خروجی سیستم به هر زمان وابسته به ورودی در همان زمان و زمان‌های گذشته باشد .

سیستم های بدون حافظه ، علی هستند . (سیستم های با حافظه می‌توانند به آینده نیز وابسته باشند) ≡ سیستم های بدون پیش بینی

☑ $y[n] = x[n-2] + x[n-1]$ ✓

$y[n] = x[n-1] + x[n+1]$ ×

الزاماً سیستم‌های Real-Time علی هستند .

Subject:

Year. Month. Date. (۹)

Stability (IV

پایداری: خاصیت BIBO داشته باشد (Bounded Input, Bounded Output)

$\forall n: |x[n]| < B \implies |y[n]| < C$ BIBO ✓

$\exists n_0\ |x[n_0]| < B \implies |y[n_0]| = \infty$ BIBO ✗

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]$ ✗ ☑

Linearity (V

خطی بودن: از خاصیت جمع آثار (super position) پیروی کند.

دیگر اگر ورودی 0 به سیستم وارد شود، خروجی آن نیز صفر باشد.

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$ $\Rightarrow a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \longrightarrow a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$

$y(t) = ax(t) + b$ ✗ ⟶ ورودی صفر، خروجی صفر نمی‌دهد ☑

- خطی نا ضلی (Incrementally Linear):

$x_1(t) \longrightarrow y_1(t) = cx_1(t) + b$

$x_2(t) \longrightarrow y_2(t) = cx_2(t) + b$ $\Rightarrow$

$y_1(t) - y_2(t) = c\,(x_1(t) - x_2(t))$

با ترشم مصطفی سالاری!

Time - Invariant (VI

تغییرناپذیری با زمان: جابجایی زمانی (time shifting) در سیگنال ورودی باعث جابجایی زمانی در سیگنال خروجی شود

$y(t) = \sin(6t) \cdot x(t)$ ☑

$y_1(t) = \sin(6t) \cdot x_1(t)$, $y_2(t) = \sin(6t) \cdot x_2(t) \Rightarrow \sin(6t)(x_1(t) + x_2(t))$ ✓ خطی

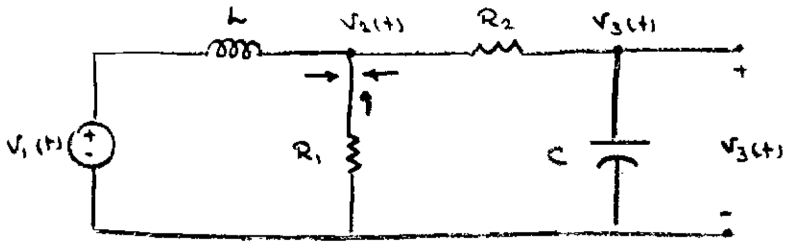
$y_1(t) = \sin(6t)\, x_1(t)$, $y_2(t) = \sin(6t) \cdot x_2(t) \Rightarrow$ حکم: $y_2(t) = y_1(t-t_0)$

$y_1(t-t_0) = \sin(6t - 6t_0)\, x(t-t_0)$ ✗ is NOT T.I

Subject :
Year . Month . Date .

$y[n] = n \cdot x[n]$ ☑ بررسی خصوصیات

Linear - Not T.I - Causal - Stable



☑

$y(t) \equiv V_3(t) \equiv$ خروجی

$x(t) \equiv V_1(t) \equiv$ ورودی

2 در گره KCL :
$$\begin{cases} \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-\infty}^{t}[V_2(\tau)-V_1(\tau)]\,d\tau + \dfrac{V_2(t)}{R_1} + \dfrac{V_2(t)-V_3(t)}{R_2} = 0 \\ \dfrac{V_3(t)-V_2(t)}{R_L} + C\,\dfrac{dV_3(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$
3 در گره KCL .

$$\Rightarrow \left(\frac{R_2 LC}{R_1} + LC\right)\frac{d^2 V_3(t)}{dt^2} + \left(R_2 C + \frac{L}{R_1}\right)\frac{d\,V_3(t)}{dt} + V_3(t) = V_1(t)$$

خواص از معادله بالا بدست آورد.

PAPCO

سیستمهای خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) :

ورودی ها : $x_i[n] \quad i=1,\dots,N$

خروجی ها : $y_i[n] \quad i=1,\dots,N$

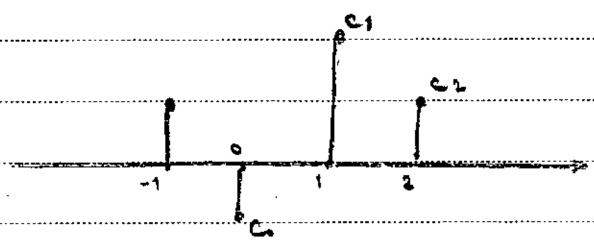
ورودی خطی : $x[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i \cdot x_i[n]$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Linear System}} \xrightarrow{y[n]} \; = \sum_{i=1}^{N} a_i \, y_i[n]$$

غربال : خاصیت سیگنال ضربه واحد

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\cdot\delta[n]$$

$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\cdot\delta[n-n_0]$$



$$x[n]\cdot\delta[n] = c_0 \cdot \delta[n]$$

$$x[n]\cdot\delta[n-1] = \overbrace{x[1]}^{c_1}\cdot\delta[n-1]$$

$$x[n]\cdot\delta[n-2] = \overbrace{x[2]}^{c_2}\cdot\delta[n-2]$$

$$x[n] = x[-1]\,\delta[n+1] + x[0]\,\delta[n] + x[1]\,\delta[n-1] + x[2]\,\delta[n-2]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x[k]}_{c_k}\cdot\delta[n-k] \quad *$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{Linear Sys}} \xrightarrow{y[n]}$$

$$\delta[n] \longrightarrow \boxed{\text{Linear Sys}} \longrightarrow h_0[n]$$

$$\delta[n-1] \longrightarrow \boxed{\text{Linear Sys}} \longrightarrow h_1[n]$$

$$\vdots$$

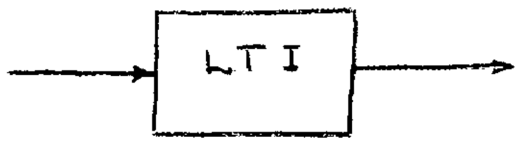
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot\delta[n-k]$$

$$\delta[n-n_0] \longrightarrow \boxed{\text{Linear Sys}} \longrightarrow h_{n_0}[n]$$

$$x[n] = \sum_k c_k\,\delta[n-n_k] \longrightarrow y[n] = \sum_k c_k\cdot h_k[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,\delta[n-k] \Longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,h_k[n]$$

*



$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,\delta[n-n_0] \qquad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,h_0[n-k]$$

$$h_0[n] = y[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]}$$

Convolution Sum *

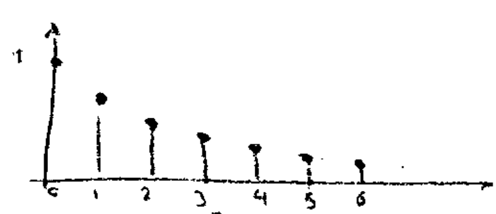
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k].\,\underbrace{h[n-k]}_{\text{Impulse Response}}$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

* مراحل محاسبه کانولوشن

1. change of variable

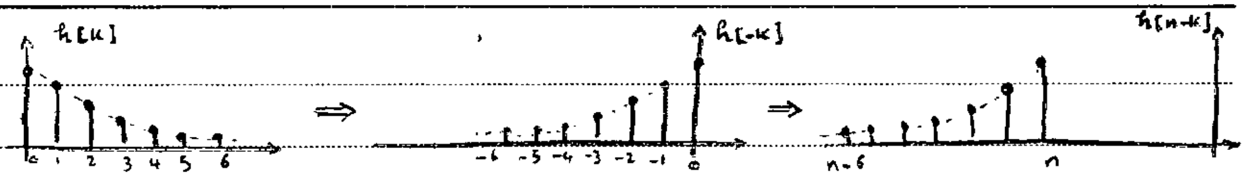
   $n \longrightarrow k \Rightarrow x[n] \longrightarrow x[k]\ ,\ h[n] \longrightarrow h[k]$
2. reflect $h[k] \longrightarrow h[-k]$
3. select "n" do shift $h[n-k]$ $\quad -\infty < n < +\infty$
4. $x[k].\,h[n-k]$
5. $\sum_k$



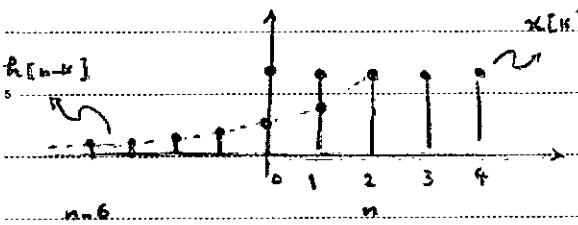
$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n & n=0,\dots,6 \\ 0 \end{cases} \quad , \ 0<\alpha<1$$

Subject:

Year. Month. Date. 11



$n<0$ $\quad y[n]=0$

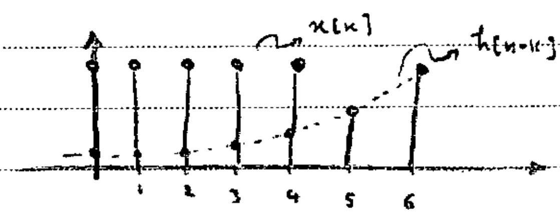


$x[k]\cdot h[n-k] = (1)\cdot \alpha^{n-k}$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \alpha^{n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$0\le n\le 4$

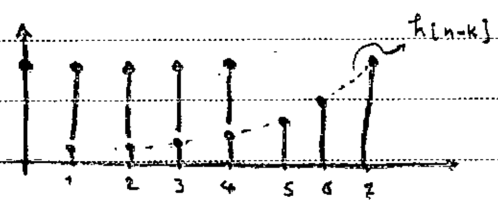
$n>4$, $n-6\le 0 \Rightarrow 4<n\le 6$



$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k] = \sum_{k=0}^{4} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

$4<n\le 6$

$n-6\le 4$, $n>6 \Rightarrow 6<n\le 10$



$$\sum_{k=n-6}^{4} \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha)^{6-r} = \frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

$6<n\le 10$

$n\geq 10$ $\quad y[n]=0$

$x[n]=\alpha^{n} u[n]$ $\quad 0<\alpha\neq\beta<1$

$h[n]=\beta^{n} u[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\cdot h[n-k]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\alpha^{k} u[k])\,(\beta^{n-k}\cdot u[n-k])$$

$$u[k] = \begin{cases} 1 & , k \geq 0 \\ 0 & , k < 0 \end{cases} \Rightarrow u[n-k] = \begin{cases} 1 & , k < n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k} \cdot \beta^{n-k} = \beta^{n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (\alpha \cdot \beta^{-1})^{k}$$

* خواص کانولوشن

I > $y[n] = x[n] * h[n]$

$y[n-n_0] = x[n] * h[n-n_0] = x[n-n_0] * h[n]$

II > $y[n] = x[n] * \delta[n]$ ضربه واحد

$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, \delta[n-k]$ $\qquad \delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$

$y[n] = x[n]$

کانولوشن یک سیگنال با سیگنال ضربه واحد = سیگنال

III > $x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$

IV > $x[n] = 0 \quad , n < N$

$h[n] = 0 \quad , n < M$

$$x[n] * h[n] = \begin{cases} 0 & n < M+N \\ \sum_{k=N}^{n-M} x[k] \cdot h[n-k] & n \geq M+N \end{cases}$$

ردیف اول :	$x[N]$	$x[N+1]$	$x[N+2]$	...	
ردیف دوم :	$h[M]$	$h[M+1]$	$h[M+2]$	$h[M+3]$	...

ردیف سوم	$x[N]\, h[M]$	$x[N+1]\, h[M]$	$x[N+2]\, h[M]$	...
ردیف چهارم	+	+ $x[N]\, h[M+1]$	+ $x[N+1] \cdot h[M+1]$	...
	$y[M+N]$	$y[M+N+1]$	$y[M+N+2]$	

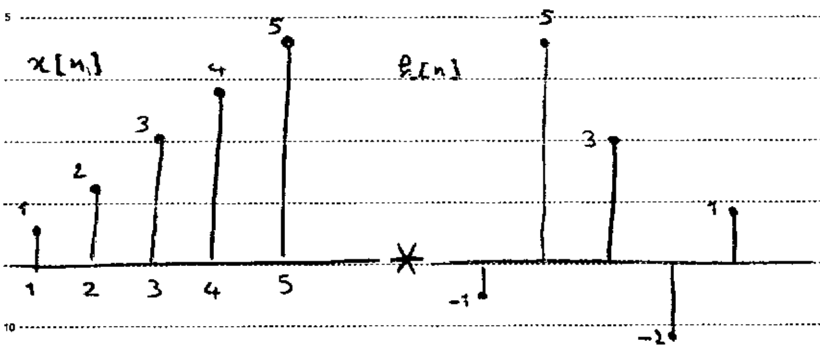
Subject:
Year. Month. Date. 12

$y[M+N] = x[N]\,h[M]$

$y[M+N+1] = x[N+1]\,h[M] + x[N]\,h[M+1]$

...

کاربرد این تکنیک برای سیگنالهای محدود است.



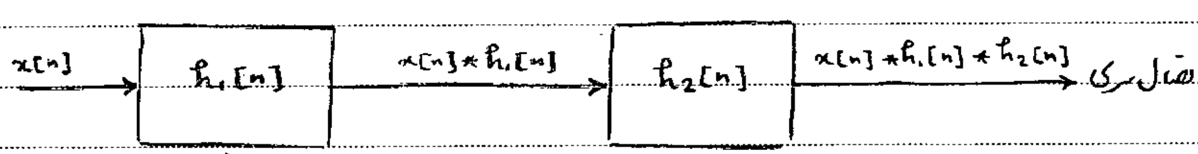
$x[n]$	1	2	3	4	5	
$h[n]$	-1	5	3	-2	1	
	-1	-2	-3	-4	-5	
		5	10	15	20	...
			3	6	9	...
				-2	-4	...
	$y[-2]$	$y[-1]$	$y[0]$			
	=	=	=			
	-1	3	10			

V > Commitative جابجایی پذیری

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\, x[n-k]$$

VI > Associative شرکت پذیری

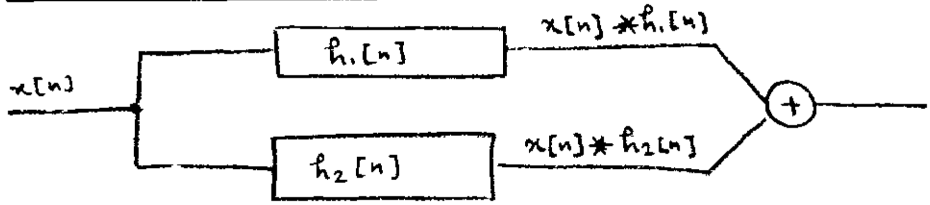
$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



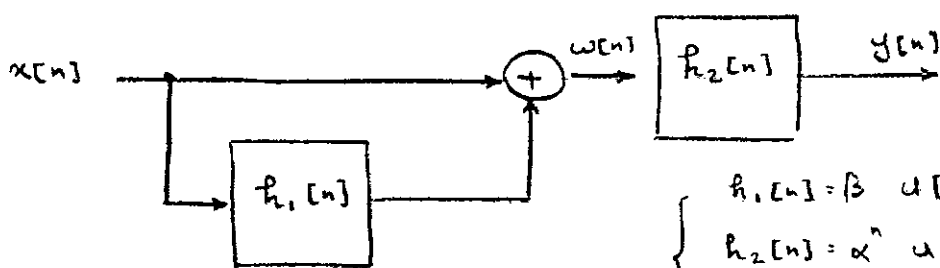
VII > Distributive توزیع پذیری

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

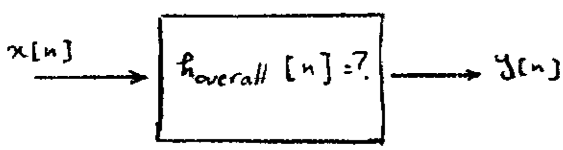
Subject:
Year   Month   Date



اتصال موازی



$$\begin{cases} h_1[n] = \beta \quad u[n-1] \\ h_2[n] = \alpha^n \quad u[n] \\ \alpha \neq \beta \end{cases}$$



اثبات:

$\omega[n] = x[n] + x[n] * h_1[n]$

$y[n] = \omega[n] * h_2[n] = (x[n] + x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$

$= [x[n] * (\delta[n] + h_1[n])] * h_2[n]$

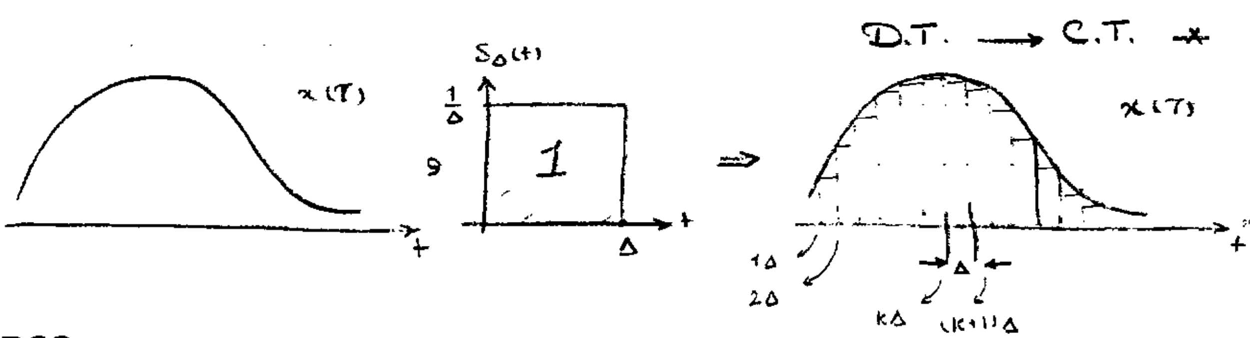
$= x[n] * [(\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n]] = x[n] * h_{overall}[n]$

$h_{overall} = (\delta[n] + h_1[n]) * h_2[n] = \dots = \alpha^n u[n] + \beta\alpha^{n-1} u[n-1]$

یادآوری:

$$\omega[n]\Big|_{x[n]=\delta[n]} = \delta[n] + \delta[n] * h_1[n]$$

D.T. $\longrightarrow$ C.T. *



$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \hat{x}(t) = x(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \delta_\Delta(t-k\Delta) \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) \cdot dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot d(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

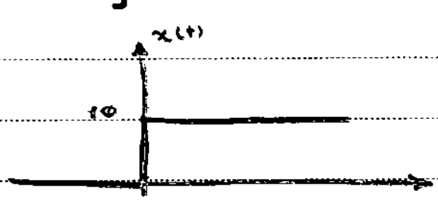
$$y(t) = x(t) * h(t-\tau)$$

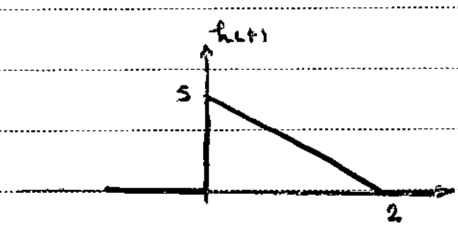
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$$

* مراحل

1. $\tau \leftarrow t \implies x(\tau)\ ,\ h(\tau)$
2. $h(-\tau)$ reverse
3. $h(t-\tau)$ time shift
4. $x(\tau) \cdot h(t-\tau)$
5. $\int$

☑ روش گرافیکی





$x(t) = 10 \cdot u(t)$

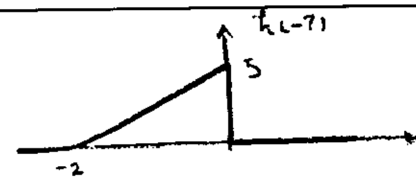
$h(t) = -\frac{5}{2}t + 5 \quad , \quad 0 < t < 2$

$$\Downarrow$$

$$h(t) = (-\frac{5}{2}t + 5)\left[u(t) - u(t-2)\right]$$

$x(\tau) = 10 \cdot u(\tau)$

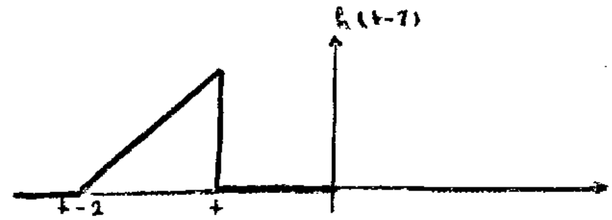
$h(\tau) = -\frac{5}{2}\tau + 5 \quad , 0<\tau<2$



I > $t<0$

$x(\tau) \cdot h(t-\tau) = 0$

$y(t) = 0$

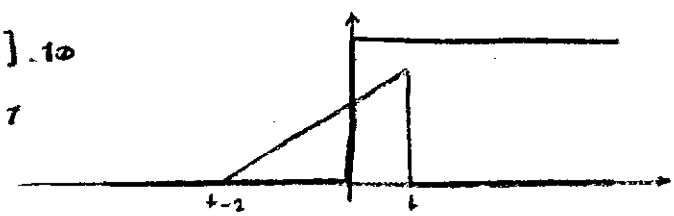


II > $0 < t < 2$

$x(\tau) \cdot h(t-\tau) = \left[-\frac{5}{2}(t-\tau)+5\right] \cdot 10$

$y(t) = \int_0^t \left[-25(t-\tau)+50\right] \cdot d\tau$

$y(t) = -\frac{25}{2}t^2 + 50t$

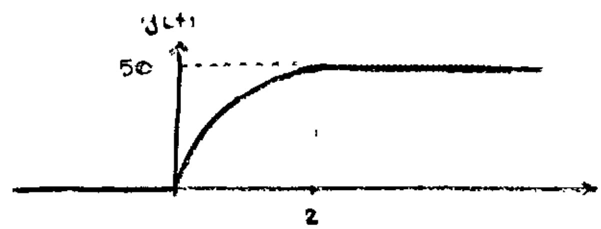


III > $t \geq 2$

$y(t) = \int_0^2 \left[-25(t-\tau)+50\right] \cdot d\tau$

$y(t) = 50$

نتیجه :



$x(t) = 3 \cdot \cos 2t$

$$h(t) = e^{-|t|} = \begin{cases} e^{-t} & , t \geq 0 \\ e^{t} & , t<0 \end{cases}$$

$x(\tau) = 3 \cos 2\tau$

$$h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-(t-\tau)} & , t-\tau \geq 0 \longrightarrow t \geq \tau \\ e^{(t-\tau)} & , t-\tau < 0 \longrightarrow t < \tau \end{cases}$$

$$y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} 3\cos(2\tau) \cdot e^{-(t-\tau)} \cdot d\tau}_{-\infty<\tau\leq t} + \underbrace{\int_{t}^{+\infty} 3\cos(2\tau) \cdot e^{(t-\tau)} \cdot d\tau}_{t<\tau<+\infty}$$

* حافظه در سیستم‌ها

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] . x[n-k]$$

$$y[n] = \dots + h[-1]\, x[n+1] + h[0] . x[n] + h[1] . x[n-1] + \dots$$

در سیستم‌های بدون حافظه خروجی تنها به ورودی فعلی بستگی دارد و تنها جمله $h[0] . x[n]$ باید غیر صفر باشد.

$$h[n] = \begin{cases} \neq 0 & n = 0 \\ = 0 & n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h[n] = K . \delta[n]} \Rightarrow \text{بدون حافظه}$$

* علّی بودن سیستم‌ها

سیستم تنها به ورودی‌های فعلی و قبلی وابسته باشد یعنی $h[1] . x[n-1] + \dots = 0$

پس:

D.T:	$h[n] = 0 \quad , n < 0$	is casual
C.T:	$h(t) = 0 \quad , t < 0$	is casual

* معکوس پذیری سیستم‌ها

اگر سیستم معکوس پذیر، به معکوس آن سری شد، خروجی کل باید معادل ورودی باشد:

$$\boxed{h(t) * h_I(t) = \delta(t)}$$

* پایداری سیستم‌ها

دارای خاصیت BIBO باشد.

D.T: $\quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] . x[n-k]$

$$\forall n \quad |x[n]| < B \Rightarrow |x[n-k]| < B$$

$$|y[n]| = \left|\sum \dots\right| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|\,|x[n-k]| \leqslant B . \sum_{-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lvert h[k] \rvert < K$	شرط پایداری سیستم D.T. : مطلقاً جمع پذیر باشد.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert h(\tau) \rvert \, d\tau < \infty$	شرط پایداری سیستم C.T. : مطلقاً انتگرال پذیر باشند.

$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$ ☑

حافظه دار : ✓

علّی : ✗ ← برای $n<0$ جواب دارد

پایداری : ✓ ← مطلقاً جمع پذیر

$h[n] = (0.99)^n \, u[n+3]$ ☑

علّی : ✗ ← برای $n=-1,-2,-3$ دارای جواب غیر صفر است:

$\sum_{n=-3}^{\infty} (0.99)^n = 101.01$ پایداری : ✓ ← مطلقاً جمع پذیر

حافظه دار : ✓

* مشتق کانولوشن

$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$

اثبات:

$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \, d\tau \longrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot \frac{d}{dt}\{x(t-\tau)\} \, d\tau$

$y''(t) = x''(t) * h(t) = x'(t) * h'(t)$

* انتگرال کانولوشن

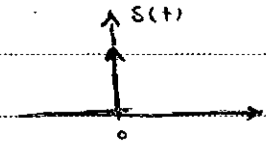
$y(t) = x(t) * h(t) \longrightarrow y_{(1)}(t) = x_{(1)}(t) * h(t)$

$x_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \, d\tau$

?!!

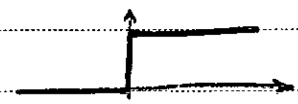
$$x(t) \longrightarrow \boxed{L.T.I} \longrightarrow y(t) \qquad *$$

پاسخ ضربه $\quad x(t) = \delta(t)$



$y(t) = h(t)$

پاسخ پله $\quad x(t) = u(t)$



$g(t) = y(t)\Big|_{x(t) = u(t)}$

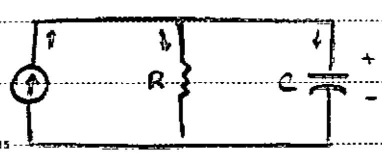
$$g(t) = h(t) * u(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = h'(t) * u(t) = h(t) * u'(t)$$

$$= h(t) * \delta(t) = h(t)$$

$$g(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

ورودی: منبع جریان ، خروجی: ولتاژ خازن



$$KCL: \quad i(t) = i_R(t) + i_c(t)$$

$$i(t) = \frac{v_c(t)}{R} + C\frac{dv_c(t)}{dt}$$

معادله سیستم $\quad C\dfrac{dy(t)}{dt} + \dfrac{1}{R}y(t) = x(t)$

دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت

$$\boxed{\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{C}x(t)}$$

LTI .

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- معادله از درجه N است
-

شرایط اولیه $\quad y(0^-) = 0 \implies y(t) = \displaystyle\int_{0^-}^{t} \frac{1}{C} e^{-(\frac{1}{RC})(t-\lambda)} x(\lambda)\, d\lambda \Big|_{x(\lambda) = \delta(\lambda)}$

• پاسخ ضربه

$$y(t) = h(t)\Big|_{x(t)=\delta(t)} = \int_{0^-}^{t} \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{RC}(t-\lambda)} \delta(\lambda)\, d\lambda$$

با توجه به خاصیت ضربه

$$x(t)\cdot\delta(t) = x(0)\cdot\delta(t)$$

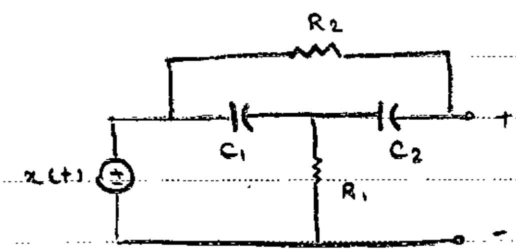
$$h(t) = \frac{1}{C}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t}\cdot u(t) = \begin{cases} \frac{1}{C}\cdot e^{-\frac{1}{RC}t} & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

حافظه دار ✓

علّی ✓

با توجه به R و C می‌توانند پایدار باشند.

☑



$x(t)$: ورودی

$y(t)$: خروجی

رابطه ورودی ـ خروجی: دیفرانسیل خطی درجه 2 با ضرایب ثابت

$$R_1C_1\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(1 + \frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2}y(t) =$$

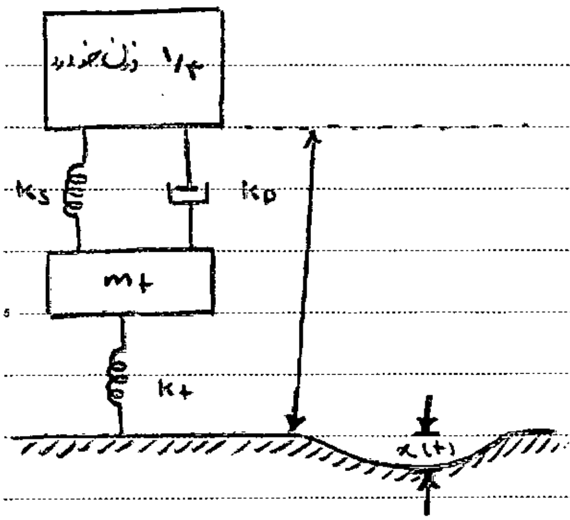
$$R_1C_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \left(\frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_1}{R_2}\right)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{R_2C_2}x(t)$$

$N = 2 \longrightarrow a_2 = R_1C_1 \qquad a_1 = 1 + \frac{R_1C_1}{R_2C_2} + \frac{R_2}{R_1}$

$M = 2 \longrightarrow b_2 = R_1C_1$

☑ جلوبندی خودرو (Automobile Suspension System)

یک چرخ = شاه فنر + کمک فنر + تایر

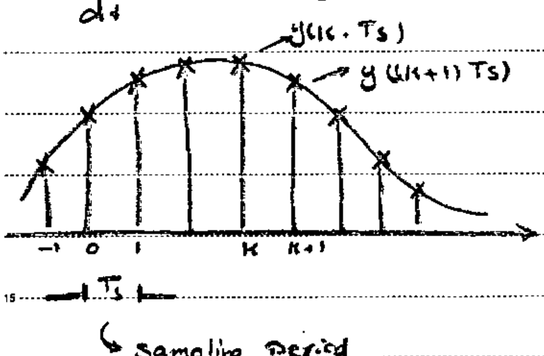


- به کمک قوانین نیوتن می‌توان برای این سیستم یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب 4 نوشت. جابجایی از حالت پایداری به عنوان ورودی $x(t)$ به سیستم داده می‌شود.

* معادله دیفرانسیل خطی درجه یک

$$\frac{dy(t)}{dt} + a\cdot y(t) = b\, x(t)$$

$\xrightarrow{\text{Discretize}}$ $\dfrac{dy(t)}{dt} = -a\,y(t) + b\,x(t) = -a\,y(nT_s) + b\,x(nT_s)$



$$\Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} \simeq \frac{y((n+1)T_s) - y(nT_s)}{T_s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_s}\, y((n+1)T_s) - \frac{1}{T_s}\, y(nT_s) = -a\,y(nT_s) + b\,x(nT_s)$$

$T_s = 1 \longrightarrow$ $y[n+1] - y[n] = -a\cdot y[n] + b\,x[n]$

$y[n] - y[n-1] = -a\cdot y[n-1] + b\,x[n-1]$

$$\therefore\; y[n] - (a-1)\,y[n-1] = b\,x[n-1]$$

D.T. LTI : $\sum_{k=0}^{N} a_k\cdot y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\cdot x[n-k]$

معادله تفاضلی با ضرایب ثابت

حل : $y[0]$ is given

$n=1: \quad y[1] = a\,y[0] - x[1]$

$n=2: \quad y[2] = a\,y[1] - x[2] = a^2 y[1] - a\,x[1] - x[2]$

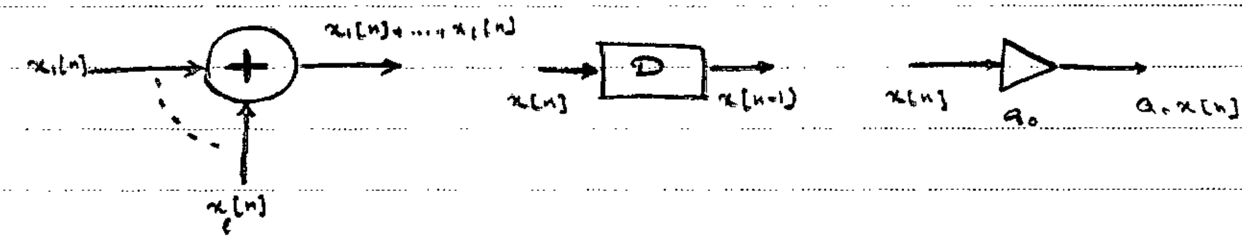
$n=3: \quad y[3] = a\,y[2] - x[3] = a^3 y[1] - a^2 x[1] - a\,x[2] - x[3]$

$$\boxed{\forall n : \; y[n] = a^n y[0] - \sum_i^n a^{n-i} . x[i]}$$

* سیستم های D.T. LTI

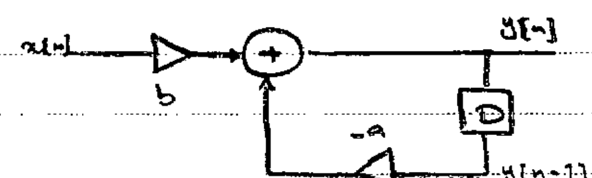
$$\sum_{i=0}^{N} a_k . y[n-k] = \sum_{i=0}^{M} b_k . x[n-k]$$

- Adder
- Multiplier
- Delay

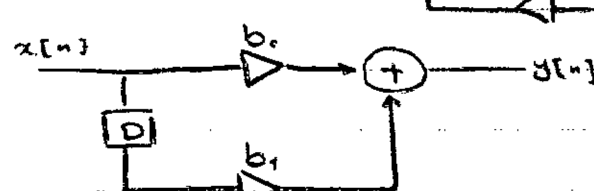


$y[n] + a \cdot y[n-1] = b\,x[n]$ ☑

معادله بازگشتی : $y[n] = -a \cdot y[n-1] + b\,x[n]$

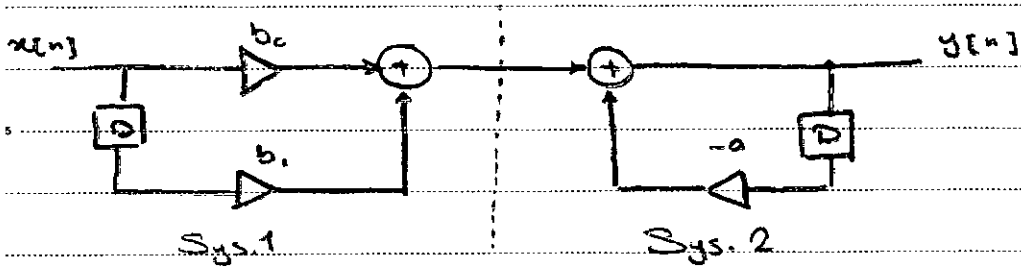


$y[n] = b_0 x[n] + b_1\, x[n-1]$ ☑



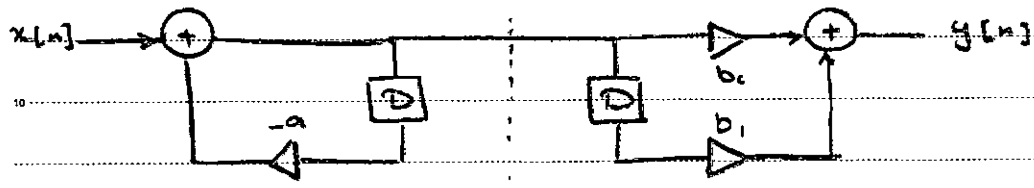
$y[n] + a\,y[n-1] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

$y[n] = -a\,y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$

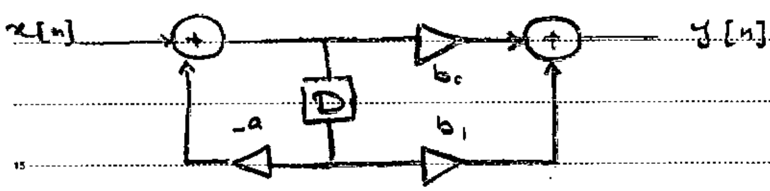


Direct Form I

راستیم $h_1[n] * h_2[n] = h_2[n] * h_1[n]$



ساده شده :



Direct Form II

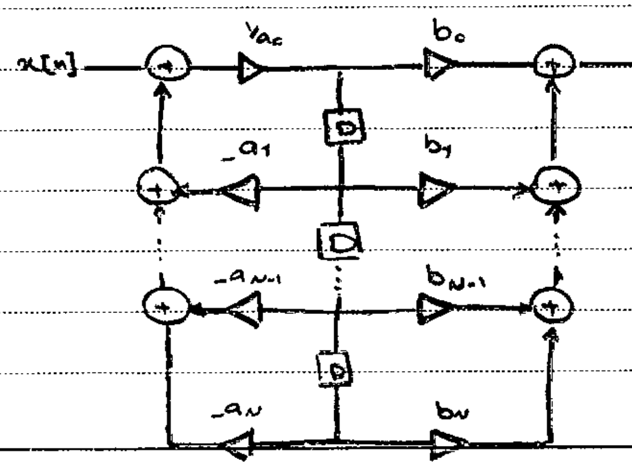
* مرطوطی :

D.T. LTI Systems Equation :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{ -\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \right\}$$

Direct Form II : $\boxed{N = M}$



Subject:
Year. Month. Date. ( )

* ساختار برای C.T. LTI

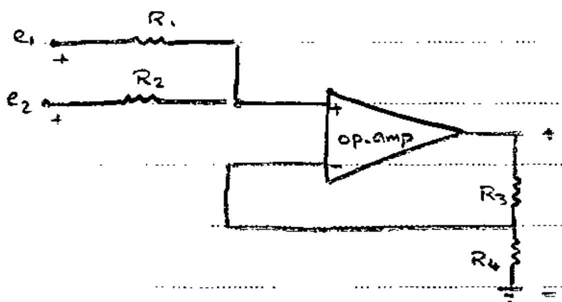
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

• Adder

• Multiplyer

• مشتق گیرنده (دیفرانسیل) ← انتگرال گیرنده

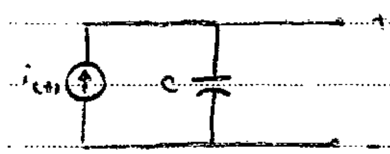
• جمع کننده (Summer)



$$e_o(t) = e_1(t)\,\frac{R_2(R_3+R_4)}{R_4(R_1+R_2)} + e_2(t)\,\frac{R_1(R_3+R_4)}{R_4(R_1+R_2)}$$

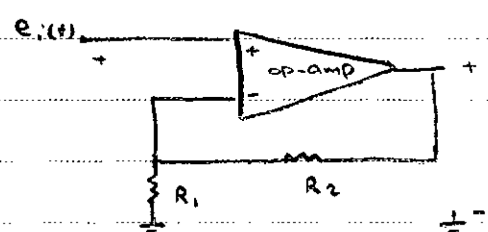
$$e_o(t) = a_1 e_1(t) + a_2 e_2(t)$$

• انتگرال گیر

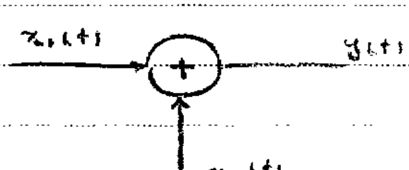


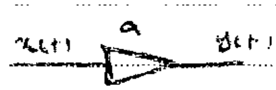
$$v_o = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

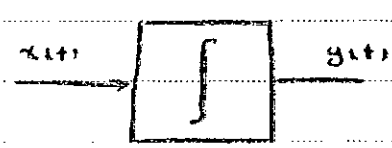
• تقویت کننده (Amplifier)



$$e_o(t) = \left(1+\frac{R_2}{R_1}\right) e_i(t)$$







$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\qquad$ $y(t) = a\,x(t)$ $\qquad$ $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau$

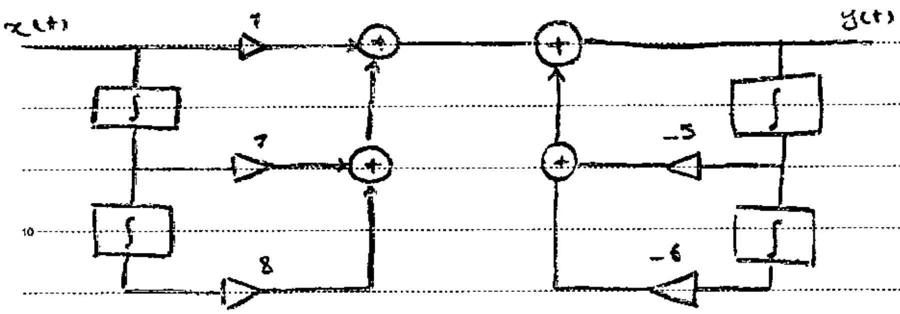
Subject:

Year. Month. Date. 18

$$\iint\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+6\,y(t)\right]=\iint\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}+7\frac{dx(t)}{dt}+8\,x(t)\right]$$

$$y(t)=-5\int_{-\infty}^{t}y(\tau)\,d\tau-6\iint_{-\infty}^{t}y(\tau)\,d\tau\,d\tau+x(t)+7\int_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau+8\iint_{-\infty}^{t}x(\tau)\,d\tau\,d\tau$$

Direct Form I



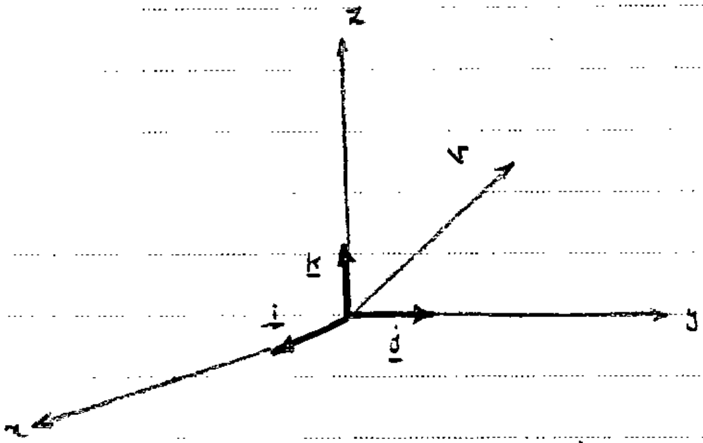
Subject:
Year. Month. Date. ( )

آنالیز فوریه

* Generalized Fourier Series : Orthogonal Functions

توابع متعامد

* Vector Analysis



$\{ \underline{i} , \underline{j} , \underline{k} \}$

• مستقل: نتوان یک بردار را بر اساس دوتای دیگر نوشت. ← $\underline{i}$ و $\underline{j}$ و $\underline{k}$ مستقلند.

• تمام فضای سه‌بعدی را می‌توان با $\underline{i}$ ، $\underline{j}$ و $\underline{k}$ نشان داد. ←

$V = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$

• طول این بردارها یک می‌باشند.

$\|\underline{i}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

• این بردارها متعامد هستند دو به دو ← ضرب داخلی آنها برابر صفر است.

$\underline{i}^T \underline{j} = \underline{j}^T \underline{k} = \underline{k}^T \underline{i} = 0$

* خاصیت تعامد بین دو سیگنال

$\{ \phi_i(t) \} \quad i = 1, \dots, n$

Orthogonality Property : $[t_1 , t_2]$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i \, \phi_j(t) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases}}$$

$\underline{i}^T \underline{j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. 29

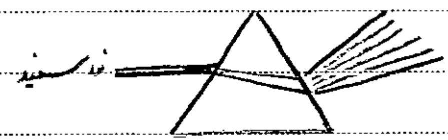
* نمایش سیگنال دلخواه $f(t)$ برحسب سیگنالهای پایه

• بردارهای متعامد نقش توابع پایه (basis) را ایفا می‌کنند.

$f(t) \sim$ دلخواه $[t_1, t_2]$, $\{\phi_i(t)\}$ $i = 1, \dots, n$

$$f(t) = \sum_i^n c_i \cdot \phi_i(t)$$

☑ منشور:



*

$$\hat{f}(t) \simeq \sum_i^n c_i \cdot \phi_i(t)$$
$$\simeq c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t)$$

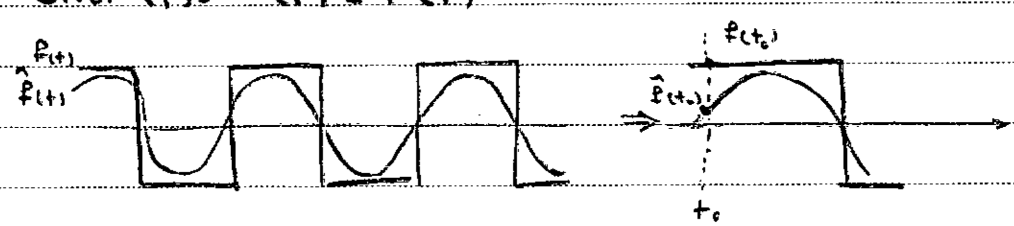
c_i = ضرایب ثابت ← برای رسیدن به $f(t) = \hat{f}(t)$ باید این ضرایب بهینه تعیین شود

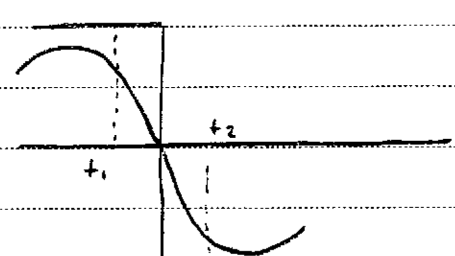
$$\forall t : f(t) = \hat{f}(t) \Longrightarrow c_i = \text{optimal}$$

* MSE = Mean Square Error ، میانگین نرخ خطا)

$$\text{error}(t) = f(t) - \hat{f}(t)$$

☑





$t_1 : f(t_1) - \hat{f}(t_1) > 0 \rightarrow e(t_1) > 0$

$t_2 : f(t_2) - \hat{f}(t_2) < 0 \rightarrow e(t_2) < 0$

$\sum e(t_i) \rightarrow 0$!?!

از مجذور استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (e(t))^2 \cdot dt}$$

Subject :

Year   Month .   Date . / /

* جمع بندی

Given: $\{\phi_i(t)\}$ $i = 1, \dots, n$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t) \cdot \phi_j(t)\, dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases}$$

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \phi_i(t) \qquad [t_1, t_2]$$

Goal: Find c_i

Such that MSE is minimized

Construct:

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(t) \right]^2 \cdot dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f(t) - c_1 \phi_1(t) - c_2 \phi_2(t) - \dots - c_n \phi_n(t) \right]^2 dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \Big[f^2(t) + c_1^2 \phi_1^2(t) + c_2^2 \phi_2^2 + \dots + c_n^2 \phi_n^2$$
$$- 2 c_1 f(t) \phi_1(t) - 2 c_2 f(t) \phi_2(t) - \dots$$
$$- 2 c_1 c_2 \phi_1 \phi_2 - \dots - 2 c_{n-1} c_n \phi_{n-1} \phi_n \Big] \cdot dt$$

با توجه به شرط تعامد

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i \cdot \phi_j \cdot dt \xrightarrow{i \neq j} 0$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} 2 c_i c_j \phi_i(t) \cdot \phi_j(t)\, dt = 0$$

پس

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[f^2(t) + c_i^2 \phi_i^2 - 2 c_i f(t) \phi_i(t) \right] \cdot dt$$
$$i = 1, \dots, n$$

Subject:

Year. Month. Date. 21

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (f^2(t).dt + C_i^2 K_i - 2\, C_i\, \gamma_i(t)).dt$$

$$\gamma_i(t) = \int_{t_1}^{t_2} f(t).\phi_i(t).dt$$

$$C_i^2 K_i - 2C_i \gamma_i(t) = \left(C_i\sqrt{K_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{K_i}}\right)^2 - \frac{\gamma_i^2}{K_i}$$

$$MSE = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^2(t).dt + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \left(C_i\sqrt{K_i} - \frac{\gamma_i}{\sqrt{K_i}}\right)^2}_{\circledast} - \sum_{i=0}^{n} \frac{\gamma_i}{K_i}$$

$$MSE > 0$$

برای کمینه سازی تنها جایی که C_i دخالت دارد جمله $\circledast$ است.

$$\text{optimization}: \circledast = 0 \longrightarrow C_i\sqrt{K_i} = \frac{\gamma_i}{\sqrt{K_i}} \longrightarrow \boxed{C_i = \frac{\gamma_i}{K_i}}$$

$$C_i\ (\text{optimal}) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t).\phi_i(t).dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_i^2(t).dt}, \quad \phi_i \in \mathbb{R}$$

اگر $\phi_i \in \mathbb{C}$ باشد

$$\hat{f}(t) = C_1\phi_1(t) + \dots + C_n\phi_n(t)$$

$\phi_i^*(t) = \text{Conjugate}\ (\phi_i(t))$ مزدوج

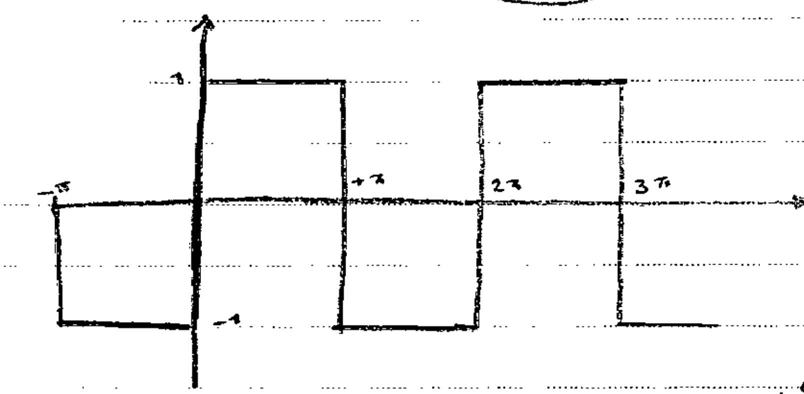
$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_i(t).\phi_j^*(t).dt = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ K_i & i = j \end{cases}$$

صورت و مخرج را مزدوج ϕ_i فرض می‌کنیم

$$\int_{t_1}^{t_2} \hat{f}(t).\phi_i^*.dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum C_j.\phi_j(t).\phi_i^*(t).dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum C_j \cdot \phi_j(t) \cdot \phi_i^*(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} C_i \cdot \phi_i \cdot \phi_i^*\,dt = C_i \cdot K_i$$

$$C_i = \frac{1}{K_i}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\cdot \phi_i^*(t)\cdot dt$$



periodic : $T_0 = 2\pi$

$\omega_0 = 1$

$\phi_n(t) = \{\sin(n\omega_0 t)\}$

توابع پایه

orthogonality : $\int_{\langle T\rangle} \phi_n(t)\cdot \phi_m(t)\cdot dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ K_n & n = m \end{cases}$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \sin(n\omega_0 t)\cdot \sin(m\omega_0 t)\cdot dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left[\frac{1}{2}\cos(n-m)\omega_0 t - \frac{1}{2}\cos(n+m)\omega_0 t\right] dt$$

$\frac{1}{2}\cos(0) - \frac{1}{2}\cos 2n\omega_0 t$

$\frac{1}{2}$ $\quad$ 0

$$= \begin{cases} n = m , & \frac{T_0}{2} \\ n \neq m , & 0 \end{cases}$$

پس مجموعه سیگنالهای سینوسی متعامدند (همچنین مجموعه سیگنالهای کسینوسی) با $K_i = \frac{T_0}{2}$

$\phi_n = \{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$

(ادامه مثال)

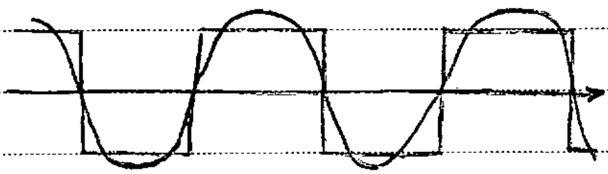
$K_i = \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+2\pi} f(t)\cdot \phi_n(t)\cdot dt = \frac{1}{\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} f(t)\cdot \sin(nt)\cdot dt$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}(1)\sin(nt)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)\sin(nt)\right\} = \begin{cases} 0 & n \text{ is even} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ is odd}\end{cases}$$

$$f(t) = C_1\Phi_1(t) + \underbrace{C_2\Phi_2(t)}_{0} + \dots + C_n\Phi_n(t)$$

$n=1$: $\hat{f}(t) = C_1 \cdot \Phi_1(n) = \frac{4}{\pi}\sin(t)$



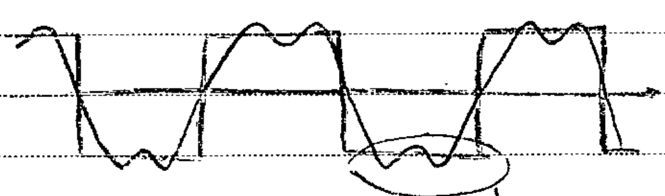
$$MSE\Big|_{n=1} = \frac{1}{t_2-t_1}\left\{\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,dt - C_1^2K_1 - C_2^2K_2 - \dots\right\}, \quad K_1=K_2=\dots=K_n=\pi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\int_0^{\pi}(1)^2\,dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-1)^2\,dt\right) - \dots\right] = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi - \pi\left(\frac{4}{\pi}\right)^2\right) =$$

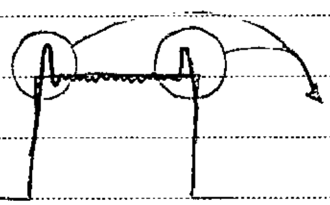
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \simeq 0.019$$

$n=2$: $C_2 = 0 \longrightarrow n$ is even

$n=3$: $\hat{f}(t) = C_1\Phi_1(t) + C_3\Phi_3(t) = \frac{4}{\pi}\sin(t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\pi)$



$$MSE\Big|_{n=3} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \simeq 0.10$$

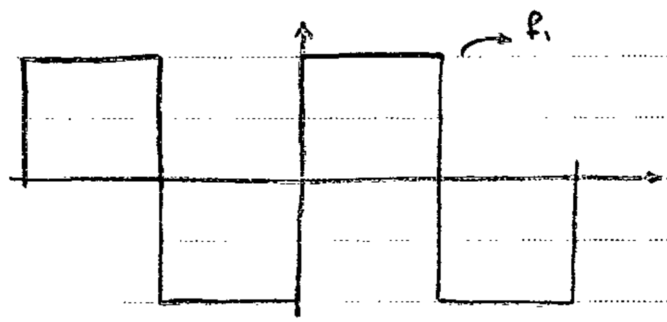


• به این ارتعاشات Ripple گویند.
با افزایش n ، دامنه این ارتعاشات کم می‌شود.
پیکهای این ارتعاشات بسمت نقاط ناپیوستگی می‌رود.
این پدیده را Gibbs Phenomenon می‌نامند.

چون سیگنال ورودی، فرد است، سیگنالهای پایه هم فرد است ترتیب ضرب می‌شود. اگر از cos استفاده شود که زوج است، MSE زیاد می‌شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

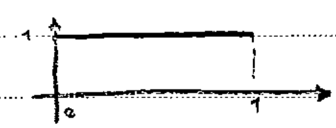
• به دلیل اینکه سیگنال‌های سینوسی برای هر مجموعه مناسب نیست، نمی‌توان به آنها complete set اطلاق کرد.



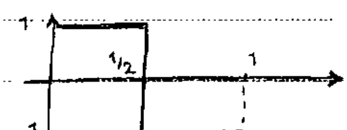
سیگنال پایه:

Walsh Function

$$\phi_0(t) = 1 \qquad 0 \leq t \leq 1$$

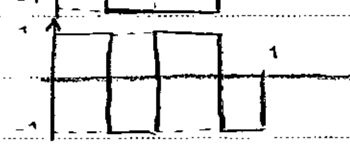


$$\phi_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$



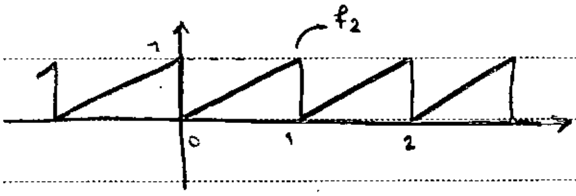
$$\phi_2^{(1)}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{4} \,,\; \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \\ -1 & \end{cases}$$

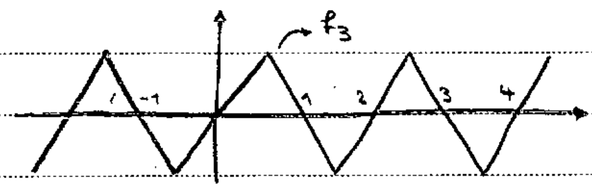
$$\phi_2^{(2)}(t) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$



$$\phi_{m+1}^{(2k-1)}(t) = \begin{cases} \phi_m^{(k)}(2t) & , \; 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (-1)^{k+1}\,\phi_m^{(k)}(2t-1) & , \; \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

$$\phi_{m+1}^{(2k)}(t) = \begin{cases} \phi_m^{(k)}(2t) & , \; 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ (-1)^{k}\,\phi_m^{(k)}(2t-1) & , \; \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$





$[-1, 1]$ Legendre Functions : مثال

$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

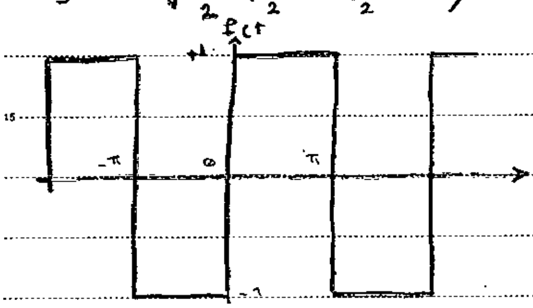
$\phi_1(t) = t\sqrt{\frac{3}{2}}$

$\phi_2(t) = \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)$

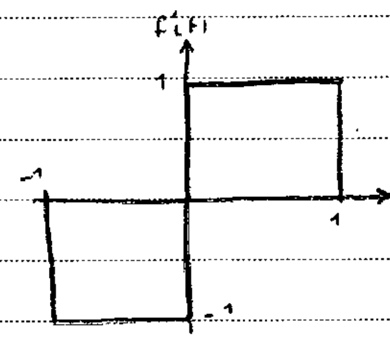
$\phi_3(t) = \sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t\right)$

$$\phi_n = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} \cdot P_n(t)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \times \frac{d^n}{dt^n}\left(t^2 - 1\right)^n$$



$\xrightarrow[\text{scaling}]{f\left(\frac{t}{\pi}\right)}$



$$C_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(t) \cdot \phi_n(t) \cdot dt}{\int_{-1}^{1} \phi_n^2(t) \cdot dt}$$

$C_0 : \int_{-1}^{1} \phi_0^2(t) \cdot dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} t \Big|_{-1}^{1} = 0$

$$C_1 = \frac{\int_{-1}^{0} (-1)^t \sqrt{\frac{3}{2}}\, dt + \int_{0}^{1} (-1)^t \sqrt{\frac{3}{2}}\, dt}{\int_{-1}^{1} \frac{3}{2} t^2 \cdot dt} = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$C_2 = 0 \longrightarrow n = 0, 2, 4, \ldots : C_n = 0$

PAPCO $C_3 = \sqrt{7/16}$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\hat{f}(t) = -\frac{3}{2}t + \sqrt{\frac{7}{16}}\left(t^3 - \frac{3}{2}t\right) + \dots + C_n\phi_n(t)$$

$[0, +\infty)$ Laguerre Functions سیگنالهای پایه :

$$\phi_n(t) = \frac{1}{n!}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot L_n(t)$$

$$L_n(t) = e^{t} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n \cdot e^{-t}\right)$$

$(-\infty, +\infty)$ Hermite Functions سیگنالهای پایه :

$$\phi_n(t) = \left(2^n \cdot n! \sqrt{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot H_n(t)$$

$$H_n(t) = (-1)^n \cdot e^{t^2} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right) \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Harmonic Complex Exponential : سیگنالهای پایه

$$e^{jK\omega_0 t}, \quad K = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cdot \phi_n^*(t) \cdot dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \cdot \phi_n^*(t) \cdot dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \cdot \phi_m^*(t) \cdot dt = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ K_n & , n = m \end{cases}$$

سری تمایز:

$$\int_{\langle T_0 \rangle} e^{jn\omega_0 t} \cdot e^{-jm\omega_0 t} \cdot dt = \int_{\langle T_0 \rangle} e^{j(n-m)\omega_0 t} = \begin{cases} T_0 & , m = n \\ 0 & , m \neq n \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. 24

$$C_n = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\,.\,e^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k\,.\,e^{jk\omega_0 t}$$

Fourier Series

C_n : ضرایب سری فوریه

$f(t) = e^{-t}$ in one period $(-1, 1) \Rightarrow T_0 = 2$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$

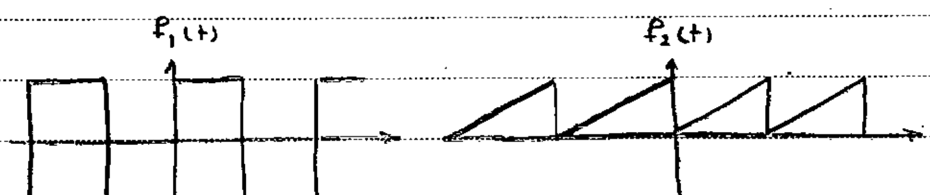
$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\,.\,e^{-jk\omega t}\,dt$$

$$C_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-t}\,.\,e^{-jk\pi t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+jk\pi)t}\,dt = \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{-(1+jk\pi)}\,e^{-(1+jk\pi)t}\Big|_{-1}^{1}$$

$$C_k = \frac{(-1)(1-jk\pi)\sinh(1)}{1+k^2\pi^2}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1-jn\pi)\sinh(1)}{1+n^2\pi^2}\,.\,e^{jn\pi t}$$

1:



برای n های مختلف سیگنال‌های مربوط را تقریب بزنید.

$A = \{\sin m\omega_0 t\}$

$B = \{\cos m\omega_0 t\}$

$C = \{\text{Walsh}\}$

$D = \{\text{Legendre}\}$

$E = \{e^{jn\omega_0 t}\}$

Subject :

Year .　　Month .　　Date .　( )

$x(t)$ is periodic (T_0) *

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\cdot dt \longrightarrow C_k \in \mathbb{C} \begin{cases} C_k = Re\{C_k\} + j\, Im\{C_k\} \\ C_k = |C_k|\cdot \exp\{-j\measuredangle C_k\} \end{cases}$$

$$f(t) = d_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t)\right)$$

$d_0 \equiv$ DC term of $f(t)$ $\longrightarrow$ $\boxed{d_0 = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\,dt}$

$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\cdot\cos(k\omega_0 t)\cdot dt$	← ضرب cos در f(t) و انتگرال در یک دوره
$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f(t)\cdot\sin(k\omega_0 t)\, dt$	

$C_k = \begin{cases} \frac{a_k - j\, b_k}{2} & k > 0 \\ d_0 & k = 0 \\ \frac{a_k + j\, b_k}{2} & k < 0 \end{cases}$	$a_k = 2\, Re\{C_k\}$ $b_k = -2\, Im\{C_k\}$

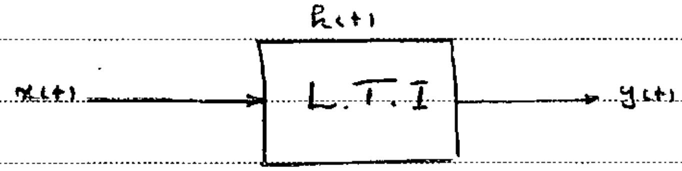
* میانگین انرژی سیگنال در یک دوره تناوب

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} f^2(t)\cdot dt$$ 　　رابطه Parseval

$$\boxed{P = d_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)}$$

ضرایب سری فوریه درصدی از کل انرژی را تشکیل می‌دهند، پس می‌توان برای داشتن مقداری خاص از انرژی این ضرایب را انتخاب کرد.

PAPCO



$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t-\tau) \cdot d\tau$$

ورودی نمایی

$$x(t) = e^{st}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)} \cdot d\tau = \underbrace{e^{st}}_{\text{تابع ورودی}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau}_{\text{مقدار ثابت}}$$

تغییر اندازه سیگنال ←

$x(t)$ تابع ویژه (eigen function) است و مقدار ثابت را eigen value of LTI یعنی مقدار ویژه آن می‌نامند.

$x(t) = e^{st}$ ⟶ eigen function

$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau$ ⟶ eigen value

پس با توجه به خطی بودن LTI روابط بالا داریم:

$$x(t) = a_1 \cdot e^{st_1} + a_2 \cdot e^{st_2} + a_3 \cdot e^{st_3}$$

$$y(t) = a_1 \cdot e^{st_1} \cdot H(s_1) + a_2 \cdot e^{st_2} \cdot H(s_2) + a_3 \cdot e^{st_3} \cdot H(s_3)$$

در حالت کلی:

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot e^{s_k t}$$

$$y(t) = \sum_k a_k \cdot H(s_k) \cdot e^{s_k t}$$

حال با مقایسه با رابطه سری فوریه داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jw_0 k t}$$

$$S_k = j \cdot k \cdot w_0$$

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \cdot H(jkw_0)\, e^{jkw_0 t}$$

$$\underbrace{H(jkw_0)}_{\text{پاسخ فرکانس سیستم LTI}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} \cdot d\tau \Big|_{s=jkw_0}$$

Subject:
Year. Month. Date.

LTI ✓

$x(t) = \sin(4\pi t) + \cos(6\pi t + \frac{\pi}{4})$

$h(t) = e^{-4t} \cdot u(t)$

الف) ضرایب سری فوریه ورودی ؟

$x(t) = \sum_{k} {}_{-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$

$x(t) \longrightarrow \text{periodic} \Rightarrow T_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi$

$x(t) = \sum_{k} {}_{-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{jk(2\pi)t}$

$x(t) = \frac{1}{2j}\left\{ e^{j4\pi t} - e^{-j4\pi t} \right\} + \frac{1}{2}\left\{ e^{j(6\pi t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(6\pi t + \frac{\pi}{4})} \right\}$

$k = 2 \longrightarrow c_2 = \frac{1}{2j}$

$k = -2 \longrightarrow c_{-2} = -\frac{1}{2j}$

$\Big\} \; c_{-2} = c_2^*$

مزدوج

$k = 3 \longrightarrow c_3 = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}$

$k = -3 \longrightarrow c_{-3} = \frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$

$\Big\} \; c_{-3} = c_3^*$

ب) ضرایب سری فوریه خروجی ؟

$b_k = a_k \cdot H(s)\Big|_{s = jk\omega_0}$

$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\tau} \cdot u(\tau) \, e^{-s\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-4\tau} \cdot e^{-s\tau} \cdot dt$

$= \frac{-1}{4+s} e^{-(4+s)\tau}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4+s}$

$H(jk\omega_0) = \frac{1}{4 + jk\omega_0} \longrightarrow$ حل قسمت ب : $H(jk\omega_0)\Big|_{k = 2, -2, 3, -3}$

Subject:
Year. Month. Date. 26

* خواص سری فوریه

I> $x(t) \in \mathbb{R}$

$C_k = C_{-k}^*$ یا $C_{-k} = C_k^*$

II> $x(t) \longrightarrow$ Periodic (T_0)

$x(t) \xleftrightarrow{F.S.} C_k$

$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.S.} e^{-jk\omega_0 t_0} \cdot C_k$

III> $x(t) \xleftrightarrow{F.S.} C_k$

$x(-t) \xleftrightarrow{F.S.} C_{-k}$

IV> $x(t)$ is periodic $(T_0) \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

$v(t)$ is periodic $(T_0) \xleftrightarrow{F.S.} b_k$

$z(t) = x(t) . v(t)$ is periodic $(T_0) \xleftrightarrow{F.S.} C_k = a_k * b_k$

اثبات)

$$C_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} z(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} \underbrace{x(t)}_{\sum a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}} \cdot v(t) \cdot e^{-} \cdot dt = \dots$$

V> Parseval's Relation

$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x^2(t)| \cdot dt = \sum_{k}{}_{-\infty}^{+\infty} |C_k|^2$$

بیان انرژی سیگنال می‌باشد

اثبات)

$$\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} |x^2(t)| . dt = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} x(t) \cdot x^*(t) \cdot dt = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} \Big[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}\Big] \cdot x^*(t)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \underbrace{\Big[\frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} e^{jk\omega_0 t} x^*(t) \cdot dt\Big]}_{C_k^*} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |C_k|^2$$

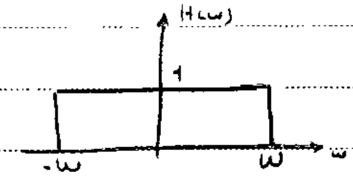
Subject :
Year . Month . Date . ( )

$x(t)$ is periodic

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\frac{\pi}{4})t}$, $0 < \alpha < 1$

LTI system

$H(\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < W \\ 0 & , |\omega| > W \end{cases}$



Low-pass filter

W: cut-off frequency = ? ⟶ میانگین انرژی سیگنال خروجی = 90% میانگین انرژی ورودی

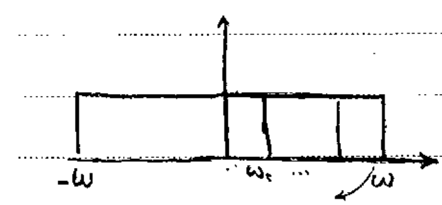
$x(t) \longrightarrow a_k = \alpha^{|k|}$, $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 . dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$

$\longrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{2|k|} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{2k} - 1 = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha}$?

$b_k = a_k H(\omega) \Big|_{\omega = jk\omega_0} \longrightarrow b_k = a_k = \alpha^{2|k|}$

$\sum_{k=-N+1}^{+N-1} |b_k|^2 = 0.90 \times \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} \longrightarrow$



$\sum_{k=-N+1}^{+N-1} \alpha^{2|k|} = 0.90 \times \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} \longrightarrow \frac{1 - 2\alpha^{2N} + \alpha^2}{1-\alpha^2} = 0.90 \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha} \longrightarrow$

$N = \frac{\log \left[1.45 \alpha^2 + 0.95 \right]}{2 \log \alpha} \xrightarrow[W \in \mathbb{Z}]{k \in \mathbb{Z}} (N-1)\omega_0 < W < N\omega_0$

VI) $f(t) \overset{F.S.}{\longleftrightarrow} C_k$

$\frac{df(t)}{dt} \overset{F.S}{\longleftrightarrow} jk\omega_0 . C_k$

اثبات

Subject:
Year. Month. Date: 27

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t))$$

$$g(t) = \frac{df(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-k\omega_0 a_k \sin(k\omega_0 t) + k\omega_0 b_k \cos(k\omega_0 t))$$

* شرط همگرایی c_k ، $k \to \infty$: همگرایی سری فوریه

$f(t)$ is Periodic (T_0)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} f(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

شرط I :

انرژی محدود در یک دوره تناوب

$$\int_{<T>} |f(t)|^2 \cdot dt < \infty$$

این شرط بدین معنا نیست که $f(t) = \hat{f}(t)$ ، $\forall t$ ولی MSE را کمینه می‌کند.

شرط II : شرایط دیریکله (Dirichlet)

اگر سیگنالی این شروط را ارضا کند آنگاه $f(t) = \hat{f}(t)$ $\forall t$ بجز در نقاط ناپیوستگی

- مطلقاً انتگرال پذیر

$$\int_{<T>} |f(t)| \cdot dt$$

- تغییرات سیگنال در یک دوره تناوب کراندار باشد ← تعداد ماکزیمم و مینیمم های سیگنال در یک دوره تناوب محدود باشد.

$\sin\left(\frac{2\pi}{t}\right)$ $\quad 0 < t \leq 1$ ☑

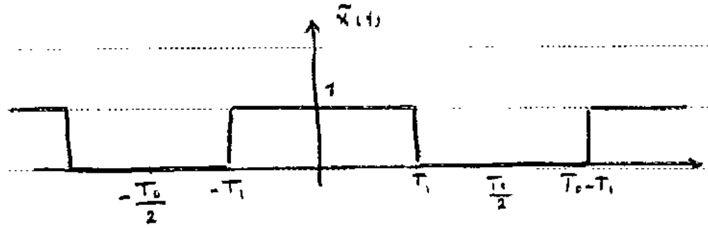
مطلقاً انتگرال پذیر ولی تغییرات کراندار نیستند.

- تعداد ناپیوستگی های سیگنال در یک دوره تناوب محدود باشد.

← در نقاط ناپیوستگی

$$\hat{f}(t_0) = \frac{f(t_0^-) + f(t_0^+)}{2}$$

تبدیل فوریه



⇒ periodic (T_0)

⇒ شرایط دیریکله را دارد

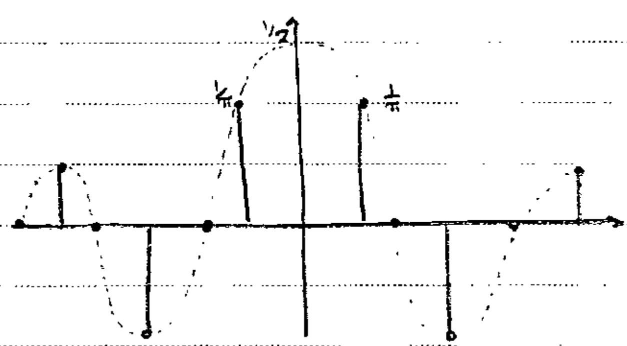
$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{\langle T_0\rangle} \tilde{x}\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} (1)\cdot e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

$$c_k = \frac{-1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{-1}{jk\omega_0 T_0}\left[e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}\right]$$

$$c_k = \frac{2}{k\omega_0 T_0}\left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right] = \frac{2}{k\omega_0 T_0}\sin(k\omega_0 T_1)$$

$$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{F.S.} \frac{2}{k\omega_0 T_0}\sin\left(2k\pi\frac{T_1}{T_0}\right)$$



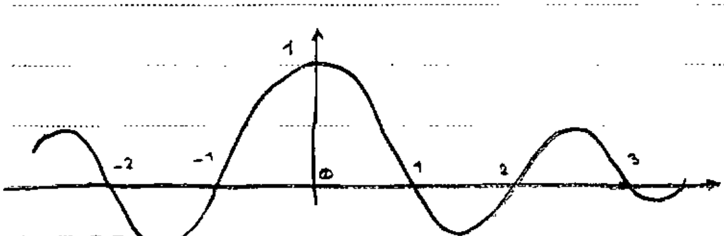
$T_0 = 4T_1$

$$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{F.S} \frac{2}{k\omega_0 T_0}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$$a_k = X(\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0} = \frac{2}{\omega T_0}(\omega T_1)\Big|_{\omega=k\omega_0}$$

$$\tilde{x}(t) \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{2}\,\text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

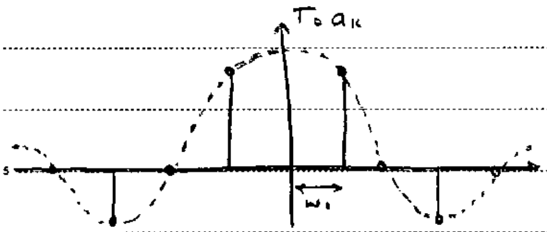
تابع سینک

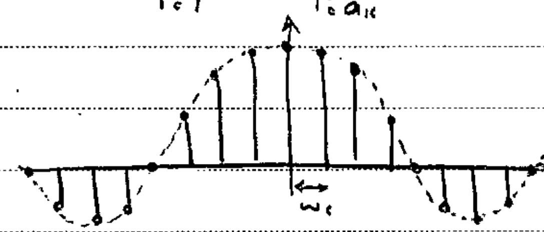


$$\text{sinc}\,\alpha = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

Subject:
Year. Month. Date. 28

$T_0 = 4T_1$ $\qquad\qquad$ $T_0 = 8T_1$ $\qquad (\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0})$



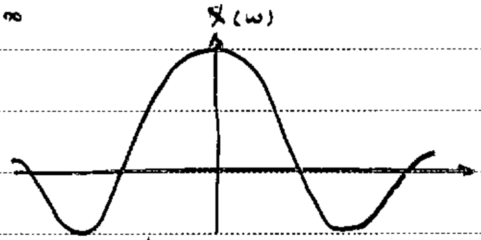


فاصله ω_0 نصف شده است.

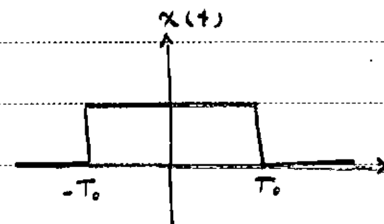
گسسته $\qquad$ پیوسته $\qquad$ تناوب $\qquad$ غیرتناوب

$T_0 a_k \xrightarrow[T_0 \to \infty]{} X(\omega)$ $\qquad\qquad$ $\tilde{x}(t) \longrightarrow x(t)$

$T_0 \to \infty$:



و



* نمایش یک تابع را برحسب مؤلفه‌های فرکانسی آن، تبدیل فوریه می‌نامیم

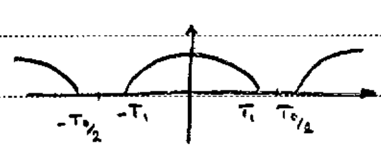
*

$\tilde{x}(t)$ is periodic (T_0)

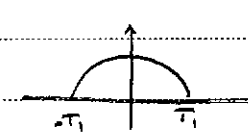
$\tilde{x}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ $\qquad$ نمایش سری فوریه

$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} \tilde{x}(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$

$\lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = x(t)$



$\Rightarrow$



$\tilde{x}(t) = x(t) \quad , \quad -\frac{T_0}{2} < t < \frac{T_0}{2}$

$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

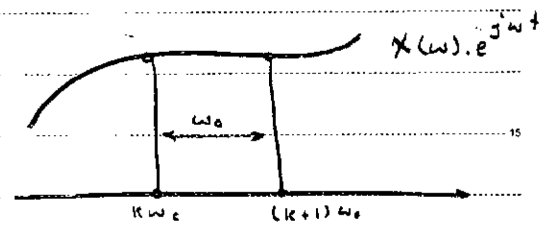
$$\underset{\text{متغیر پیوسته}}{X(\omega)}\Big|_{k\omega_0} \Rightarrow \boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt}$$

$$T_0 \cdot a_k = X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0} \xrightarrow{\text{نمونه برداری}} \boxed{a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)}$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)\, e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_0}{2\pi} X(\omega_0 k)\, e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t} \cdot \omega_0$$

$$x(t) = \lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}(t) = \lim_{\omega_0 \to 0} \tilde{x}(t)$$



$$\omega_0 \longrightarrow 0 \Rightarrow \sum \longrightarrow \int$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega}$$ Synthesis Equation معادله ترکیب

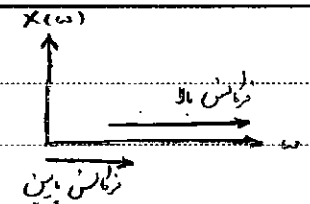
* $x(t)$ ⟵ زمان پیوسته + غیر متناوب

$$\text{Fourier Transform} = \mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

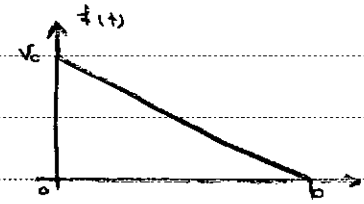
$$\text{Inverse F.T.} = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Subject:

Year. Month. Date. 29



$$\begin{cases}\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \\ \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = x(t)\end{cases} \qquad x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$



☑ تبدیل فوریه؟

$$f(t) = -\frac{V_0}{b}(t-b)\{u(t) - u(t-b)\}$$

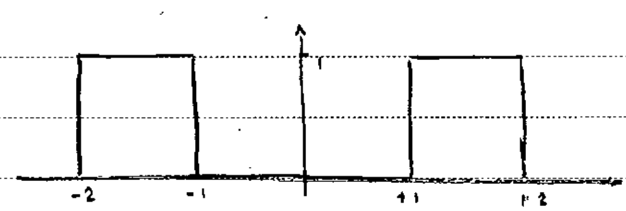
$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) . e^{-j\omega t} . dt$$

$$F(\omega) = -\frac{V_0}{b}\int_0^b (t-b)\, e^{-j\omega t} . dt = -\frac{V_0}{b}\left[\int_0^b t . e^{-j\omega t} . dt - b\int_0^b e^{-j\omega t} . dt\right] \ldots$$

$$= V_0\left[-\frac{1}{b\omega^2}e^{-j\omega b} + \frac{1}{b\omega^2} + \frac{1}{j\omega}\right]$$

$F(\omega) \in \mathbb{C} \rightarrow F(\omega) = \mathrm{Re}\{F(\omega)\} + j . \mathrm{Im}\{F(\omega)\} = \underbrace{|F(\omega)|}_{\text{تابع دامنه}} \exp\{\underbrace{\measuredangle F(\omega)}_{\text{تابع فاز}}\}$

☑ تبدیل فوریه



$$X(\omega) = \int_{-2}^{-1} (1) e^{-j\omega t} . dt + \int_{1}^{2} (1) . e^{-j\omega t}$$

$$= \frac{-1}{j\omega}\Big|_{-2}^{-1} + \frac{-1}{j\omega}\Big|_{1}^{2}$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{j\omega}\left[e^{j\omega} - e^{j2\omega}\right] - \frac{1}{j\omega}\left[e^{-j2\omega} - e^{-j\omega}\right] = -\frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}\right] + \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}}{2j}\right]$$

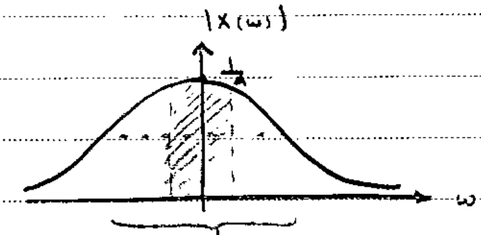
$$X(\omega) = -\frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{2\sin 2\omega}{\omega} \longrightarrow \text{Real , Even Signal}$$

PAPCO

$\mathcal{F}\{e^{-at}.u(t)\}$ ☑

$$\mathcal{F}\{e^{-at}.u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}.u(t).e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}.dt \longrightarrow X(\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$$

$$\begin{cases} |X(\omega)| = \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2+a^2}} \\ \measuredangle X(\omega) = -\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$



* خواص تبدیل‌های فوریه

I> Linearity

$x_1(t) \xleftrightarrow{F.T.} X_1(\omega)$

$x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} X_2(\omega)$

$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$

II> Symmetric

if $x(t)$ is Real signal

$X(-\omega) = X^*(+\omega)$

III> $X(\omega) = \text{Real}\{X(\omega)\} + j\,\text{Im}\{X(\omega)\}$

$X^*(\omega) = \text{Real}\{X(\omega)\} - j\,\text{Im}\{X(\omega)\}$

$X(-\omega) = \text{Real}\{X(-\omega)\} + j\,\text{Im}\{X(-\omega)\}$

$$\begin{cases} \text{Real}\{X(\omega)\} = \text{Real}\{X(-\omega)\} \longrightarrow \text{Even} \\ \text{Im}\{X(\omega)\} = -\text{Im}\{X(-\omega)\} \longrightarrow \text{Odd} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |X(\omega)| = |X(-\omega)| \\ \measuredangle X(\omega) = -\measuredangle X(-\omega) \end{cases}$$

Subject:

Year. Month. Date. 30

IV) if $x(t)$ Real & Even

then $X(\omega)$ Real & Even

اثبات) Real Signal $x(t) = x^*(t)$

Even Signal $x(t) = x(-t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{j\omega t} . dt$$

$$X^*(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) . e^{j\omega t} . dt = X(-\omega)$$

$t = -\tau$ تغییر متغیر

$dt = -d\tau$

$$X(-\omega) = X^*(\omega) = -\int_{+\infty}^{-\infty} x(-\tau) . e^{-j\omega\tau} (d\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} . d\tau$$

$$X(\omega) = X^*(\omega) = X(-\omega) \longrightarrow \text{Real \& Even}$$

V) if $x(t)$ Real & Odd

then $X(\omega)$ Pure Imaginary & Odd

VI) $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . e^{-j\omega t} . dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . [\cos \omega t - j \sin \omega t] . dt$

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \cos(\omega t) . dt}_{Re\{X(\omega)\}} - j \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . \sin(\omega t) . dt}_{Im\{X(\omega)\}}$$

VII) $x(t) = Ev\{x(t)\} + Od\{x(t)\}$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{Ev\{x(t)\}\} + \mathcal{F}\{Od\{x(t)\}\}$$

$\hookrightarrow Re\{X(\omega)\}$ $\hookrightarrow Img\{X(\omega)\}$

VIII) Time Shifting

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

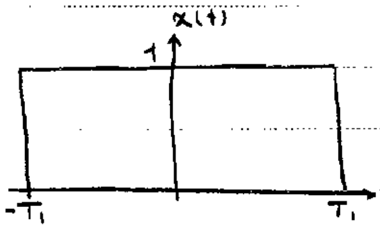
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.T.} e^{-jt_0\omega} . X(\omega)$$

اثبات)

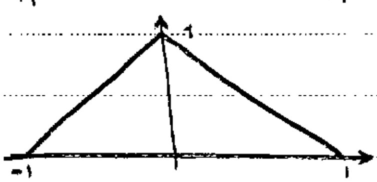
PAPCO

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)\cdot e^{-j\omega t}\,dt \;\underline{\underline{\tau=t-t_0}}\; \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j(\tau+t_0)\omega}\cdot d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\cdot e^{-j\tau\omega}\cdot e^{-jt_0\omega}\,d\tau$$ دامنه تغییر نمی کند، فقط اختلاف فاز ایجاد می شود



سیگنال $\Pi_{2T_1}(t)$ یا $P_{2T_1}(t)$ ☑



سیگنال $\Lambda_2(t)$ ☑

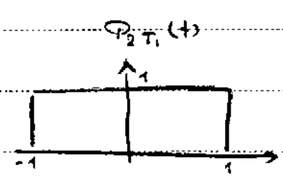
$\mathcal{F}\{P_{2T_1}(t)\}$ ☑

$$P_{2T_1}(t) = \begin{cases} 1 & , -T_1<t<T_1 \\ 0 & , \text{o.w} \end{cases} \longrightarrow \mathcal{F} = \int_{-T_1}^{T_1} (1)\cdot e^{-j\omega t} = \frac{-1}{j\omega}\, e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega T_1} - e^{+j\omega T_1}\right] = \frac{2}{\omega}\left[\frac{e^{j\omega T_1} - e^{-j\omega T_1}}{2j}\right] = 2\,\frac{\sin \omega T_1}{\omega}$$

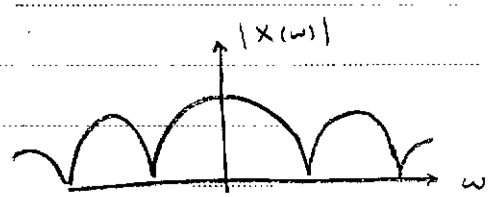
برای تبدیل به تابع سینک

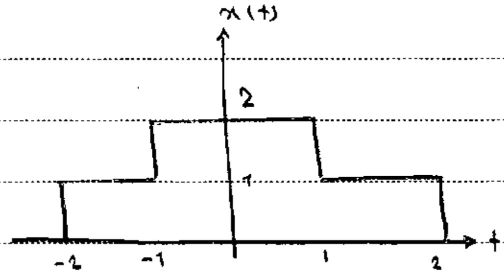
$$\mathcal{F} = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = 2\,\frac{\sin\frac{\omega T_1}{\pi}}{\frac{1}{T_1}\;\frac{\pi\,\omega T_1}{\pi}} = 2T_1\,\mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$



$$\xleftrightarrow{\text{F.T.}}\quad 2T_1\cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

دامنه تغییر سج



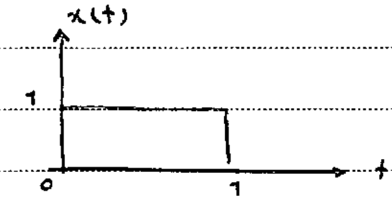


$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

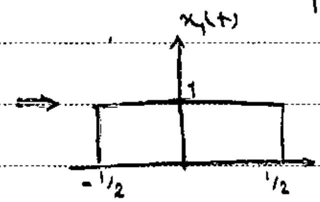
$T_1 = 1 \longrightarrow 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$

$T_2 = 2 \longrightarrow 4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$

بنابرخاصیت خطی بودن جمع می کنیم



$\Longrightarrow$



$x = x_1(t - \frac{1}{2})$

$x_1 = 2 \times \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

$X(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$

IX > Time Scaling

$x(t) \xleftrightarrow{F.T} X(\omega)$

$x(at) \xleftrightarrow{F.T} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

اثبات:

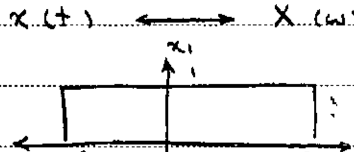
$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt \qquad a>0$

$\tau = at \longrightarrow dt = \frac{1}{a}\, d\tau$

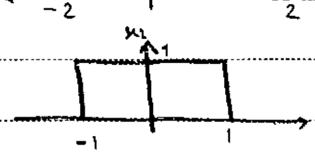
$\mathcal{F} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}\, d\tau = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

$\mathcal{F}\{x(at)\} = \int_{+\infty}^{-\infty} x(at)\, e^{-j\omega t}\, dt = \dots = \frac{-1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \qquad a<0$

$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \Longrightarrow x(-t) \longleftrightarrow X(-\omega)$



$\longleftrightarrow 4\,\mathrm{sinc}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)$



$x_2(t) = x_1\left(\frac{t}{2}\right) \longleftrightarrow 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right)$

Subject:

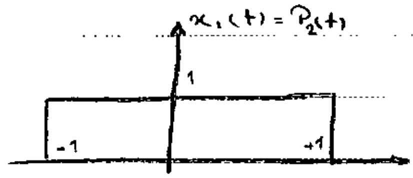
Year. Month. Date. ( )

X > Time Reverse

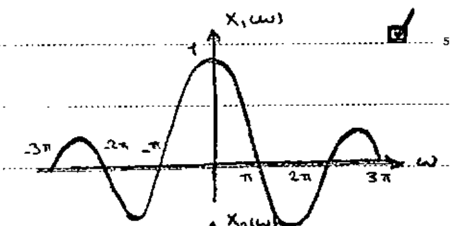
$$x(t) \xrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

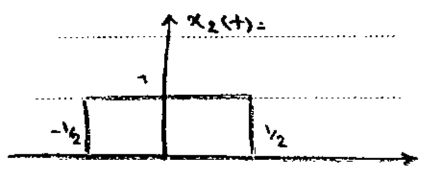
$$x(-t) \xrightarrow{F.T.} X(-\omega)$$

(اثبات) Time Scaling : $a=-1$

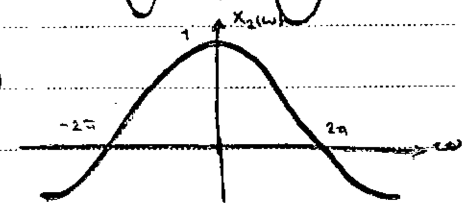


$$\longleftrightarrow 2\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = X_1(\omega)$$





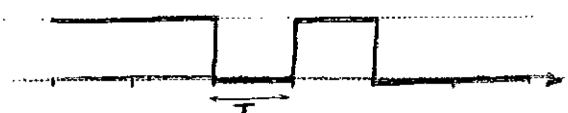
$$\longleftrightarrow \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = X_2(\omega)$$



$$x_2(t) = x_1(\overset{a}{2}t) \xrightarrow{F.T} X_2(\omega) = \frac{1}{2} \cdot X_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

پهنای طیف زمانی $\xleftrightarrow{\text{رابطه عکس}}$ (پهنای طیف فرکانسی) $\Rightarrow (\omega \propto \frac{1}{T})$

☑ انتقال اطلاعات

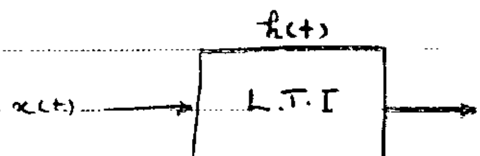


110100

case 1 : x # of bits

case 2 : $2x$ # of bits $\longrightarrow T \downarrow \longrightarrow \omega \uparrow \longrightarrow$ محدودیت پهنای فرکانسی

XI > Convolution



$$y(t) = x(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t-\tau) \cdot d\tau$$

$$x(t) \xrightarrow{F.T} X(\omega)$$

$$h(t) \xrightarrow{F.T} H(\omega)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \xrightarrow{F.T} Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

Subject:
Year. Month. Date. 82

اثبات

$$Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} y(t).e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).h(t-\tau).d\tau\right].e^{-j\omega t}.dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}.dt\right].d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).e^{-j\omega\tau}.H(\omega).d\tau$$

• اتصال سری

$$\longrightarrow\boxed{h_1(t)}\longrightarrow\boxed{h_2(t)}\longrightarrow$$

حوزه زمان

$$x(t)\longrightarrow\boxed{h_1(t)*h_2(t)}\longrightarrow$$

حوزه فرکانس

$$X(\omega)\longrightarrow\boxed{H(\omega)=H_1(\omega).H_2(\omega)}\longrightarrow Y(\omega)=X(\omega).H_1(\omega)H_2(\omega)$$

$$Y(\omega)=H(\omega).X(\omega)\Longrightarrow \text{frequency response} : \boxed{H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$$

یا transfer function

L.T.I

$h(t)=e^{-at}.u(t)\quad ,a>0$

$x(t)=e^{-bt}.u(t)\quad ,b>0$

راه اول: $y(t)=x(t)*h(t)$

راه دوم: $\mathcal{F}^{-1}\longleftarrow Y(t)=X(\omega).H(\omega)$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}.dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-bt}.e^{-j\omega t}.dt=\frac{1}{j\omega+b}$$

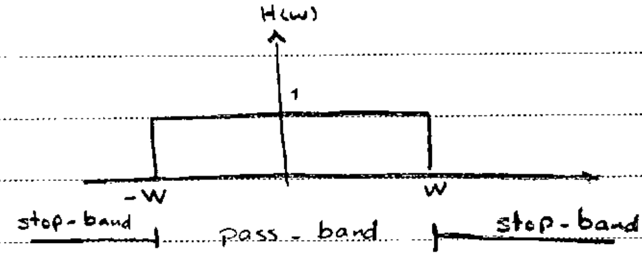
$$Y(\omega)=X(\omega).H(\omega)=\frac{1}{(j\omega+a)(j\omega+b)}=\frac{A}{j\omega+a}+\frac{B}{j\omega+b}$$

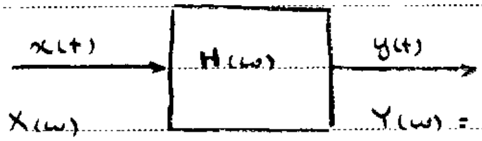
$$A=(j\omega+a)Y(\omega)\Big|_{j\omega=-a}=\frac{1}{j\omega+b}\Big|_{j\omega=-a}=\frac{1}{b-a}\quad,\quad B=\frac{1}{a-b}$$

$$y(t)=A.e^{-at}u(t)+B\,e^{-bt}u(t)$$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

↳ frequency responce

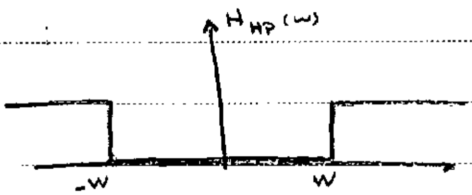




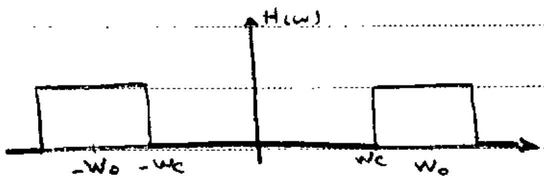
$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$

عملکرد: مولفه‌ی فرکانسی $X(\omega)$ را در بازه‌ی $(-W, W)$ نگه می‌دارد و چون این $H(\omega)$ حول مبدأ $(\omega=0)$ است به آن فیلتر پایین گذر می‌گویند.

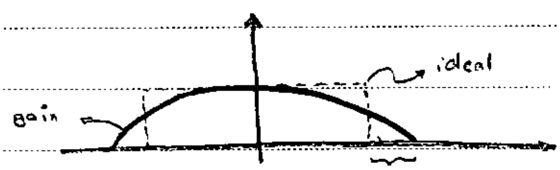
Ideal High Pass Filter



Ideal Band Pass Filter



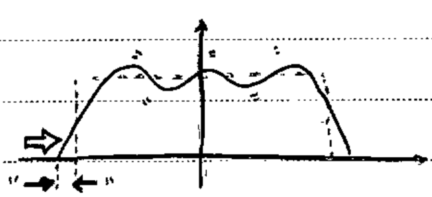
Low Pass Filter



↳ transition region → stop-band و pass-band بازه‌ی بین

برای کوتاه کردن این transition region بازه‌ی (gain) دچار ripple می‌شود

یک trade-off در طراحی پدید می‌آورد.



Ripple ⋈ Sharpness

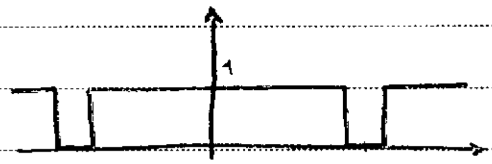
• W_c در این فیلترها به Cut-Off Frequency معروف است این مقدار در فیلترهای غیر ایده‌آل برابر است با:

$$W_c = \frac{H(\omega)}{\sqrt{2}}\Big|_{\omega=0}$$

Subject:

Year. Month. Date. 33

Nutch Filter



برای حذف یک فرکانس خاص

مثلاً برای حذف نویز دستگاه‌های برقی از نوار قلب

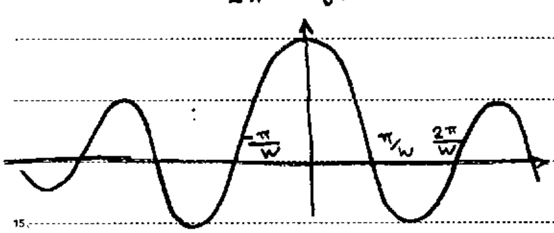
فرکانس برق شهری: 50 Hz ها

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

$h_{LP}(t) = ?$

$$h_{LP}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{LP}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_{LP}(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{+W} (1) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt} \cdot e^{j\omega t}\Big|_{-W}^{W} = \frac{1}{\pi t}\left[\frac{e^{jWt} - e^{-jWt}}{2j}\right] = \frac{1}{\pi t}\sin(Wt) = \frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$



$$h_{ILP}(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(Wt) = \frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$$

↳ ideal low pass

- دقت شود (به دوگان بودن)

$$P_{2T_1}(t) \xleftrightarrow{F.T.} 2T_1 \sin\left(\frac{WT_1}{\pi}\right)$$

$$\frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \xleftrightarrow{F.T.} H_{ILP}(\omega) = P_{2W}(\omega)$$

XII > Duality

$$f(t) \xleftrightarrow{F.T.} F(\omega)$$

$$F(t) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi f(-\omega)$$

اثبات:

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \xrightarrow{t=-t} 2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{-j\omega t} \cdot d\omega$$

$$\xrightarrow{t \leftrightarrows \omega} 2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

XIII > Differentiation

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.T.} (j\omega)\, X(\omega)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{F.T.} (j\omega)^2\, X(\omega)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F.T.} (j\omega)^n\, X(\omega)$$

اثبات)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).\, e^{j\omega t}.\, d\omega \longrightarrow ?!!$$

XIV > Integration

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T} X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau).d\tau \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0).\,\delta(\omega)$$

اثبات)

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau).d\tau = x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau).\,u(t-\tau).d\tau$$

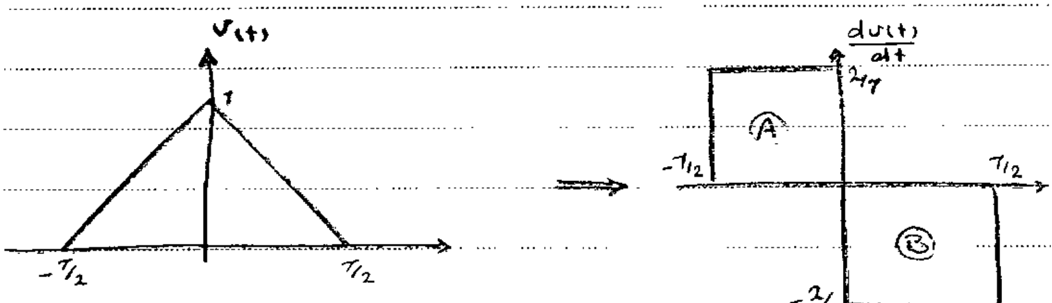
$$u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & t > \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

$$\mathcal{F}\{x(t) * u(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)\}.\mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$= X(\omega).\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] \longrightarrow \mathcal{F}\{u(t)\}$$

$$= \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(\omega)\,\delta(\omega) \longrightarrow \text{غربالی}$$

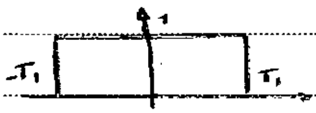
$$= \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\,\delta(\omega)$$



Subject:

Year. Month. Date. 34

راه اول : با توجه به شکل



$$\longleftrightarrow 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

Ⓐ $\frac{2}{T} \cdot 2 \frac{T}{4} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right) e^{j\omega \frac{T}{4}}$

Ⓑ $-\frac{2}{T} \cdot 2 \cdot \frac{T}{4} \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right) e^{j\omega \frac{T}{4}}$

$$Ⓐ + Ⓑ = \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)\left\{e^{j\omega\frac{T}{4}} - e^{-j\omega\frac{T}{4}}\right\} \xrightarrow{\times, \div 2j} 2j \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\omega T}{4}\right)}_{\frac{\omega T}{4} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)}$$

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt} \longleftrightarrow X(\omega) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$$x(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$X(\omega) = (j\omega) V(\omega) \Longrightarrow V(\omega) = \frac{X(\omega)}{j\omega} \Longrightarrow V(\omega) = \frac{T}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{4\pi}\right)$$

$\mathcal{F}^{-1}(P_{2T_1}(\omega))$ ☑

$$P_{2T_1}(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} 2T_1 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$\underline{P_{2T_1}(\omega)} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{T_1}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{t T_1}{\pi}\right) \quad \text{یا} \quad P_W(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{tW}{\pi}\right)$$

XV >

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} X(\omega)$$

$$t\,x(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} j \frac{d}{d\omega} X(\omega)$$

اثبات)

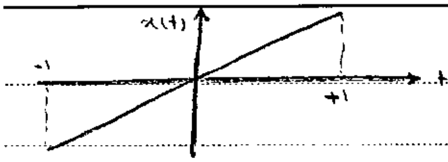
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \longrightarrow$$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jt\, x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt \longrightarrow \ldots \checkmark$$

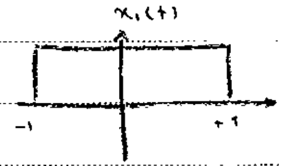
PAPCO

Subject:

Year. Month. Date. ( )

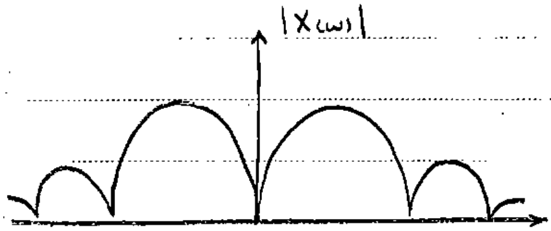


تابع بالا: Real + Odd

$\equiv t \times$ 

$\frac{2\sin(\omega)}{\omega} = X_1(\omega)$

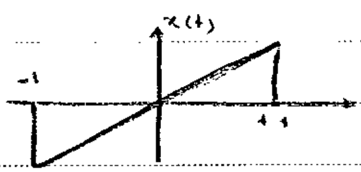
$x(t) = t \cdot x_1(t) \longleftrightarrow X(\omega) = j\frac{d}{d\omega}X_1(\omega) = j2\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{\sin(\omega)}{\omega}\right\} = j2\frac{\cos\omega}{\omega} - j2\frac{\sin\omega}{\omega^2}$



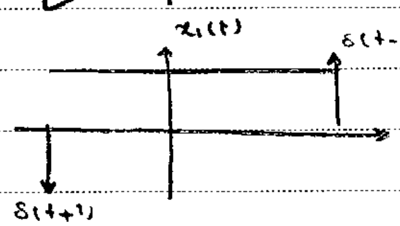
Band-Pass Filter

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = 1$

تبدیل فوریه سیگنال ضربه واحد برابر 1 است



$x_1 = \frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F.T} X_1(\omega) = j\omega X(\omega) \longrightarrow X(\omega) = \frac{X_1(\omega)}{j\omega}$



$\delta(t) \xleftrightarrow{F.T} 1 \Rightarrow \delta(t-t_0) \xleftrightarrow{F.T.} e^{j\omega t_0}$

$x_1(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{2\sin\omega}{\omega} + (e^{-j\omega} - e^{j\omega}) \longrightarrow \dots$

XVI >

$t^0 \cdot e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{j\omega+a}$

$t^1 \cdot e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F.T.} j\frac{d}{d\omega}\left\{\frac{1}{j\omega+a}\right\} = j\frac{-j}{(j\omega+a)^2} = \frac{1}{(j\omega+a)^2}$

$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-at} \cdot u(t) \xleftrightarrow{F.T} \frac{1}{(j\omega+a)^n}$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{LTI} \longrightarrow y(t)$$

$$x(t) = t.\,e^{-2t}\,u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(j\omega+2)^2}$$

$$h(t) = e^{-4t}.\,u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega+4}$$

$$Y(\omega) = X(\omega).\,H(\omega) = \frac{1}{(j\omega+4)(j\omega+2)^2} = \frac{A}{j\omega+4} + \frac{B}{j\omega+2} + \frac{C}{(j\omega+2)^2}$$

$$A = (j\omega+4)\,Y(\omega)\Big|_{j\omega=-4} \longrightarrow A = 1/4$$

$$C = (j\omega+2)^2\,Y(\omega)\Big|_{j\omega=-2} \longrightarrow C = 1/2$$

$$B = \frac{d}{ds}\left\{(s+2)^2\,Y(s)\right\}\Big|_{s=j\omega=-2} \longrightarrow B = -1/4$$

$$y(t) = \frac{1}{4}\,e^{-4t}\,u(t) - \frac{1}{4}\,e^{-2t}\,u(t) + \frac{1}{2}\,t\,e^{-2t}\,u(t)$$

XVII > Frequency Shifting

$$x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t}.\,x(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega-\omega_0)$$

اثبات) // یک خاصیت دوگان Time Shifting است.

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{F.T.} e^{-j\omega_0 t}\,X(\omega) \longrightarrow \ldots$$

XVIII > Parsavel's Relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2.\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2.\,d\omega$$

(طیف چگالی انرژی) Energy Density Spectrum $\equiv |X(\omega)|^2$

$f(t) = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2} \longrightarrow \mathcal{F}^{-1}\left\{ f\left(\dfrac{\omega}{4}\right)\right\}$ ☑

$f(t) \xleftrightarrow{F.T.} F(\omega)$

$F(t) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi \cdot f(-\omega)$ خاصیت دوگانی

$f(at) \xleftrightarrow{F.T.} \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$ خاصیت time scaling

$F(-t) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi f(\omega)$ خاصیت time reverse

$F(-4T) \xleftrightarrow{F.T.} 2\pi \left(\dfrac{1}{4} f\left(\dfrac{\omega}{4}\right)\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} f\left(\dfrac{\omega}{4}\right)$

$f\left(\dfrac{\omega}{4}\right) \xleftrightarrow{F.T.} \dfrac{2}{\pi} F(-4T)$

$f(t) = \dfrac{d^2 x(t)}{dt^2} \longleftrightarrow F(\omega) = (j\omega)^2 \cdot X(\omega)$ خاصیت مشتق

$F(\omega)\Big|_{\omega = -4t} = (j(-4t))^2 X(-4t) = -16t^2 X(-4t)$

$f\left(\dfrac{\omega}{4}\right) \xleftrightarrow{F.T.} -\dfrac{32}{\pi} t^2 X(-4t)$

* تابع همبستگی

correlation notation : $\odot$ ، $\odot$ ، $**$ ، $\circledast$

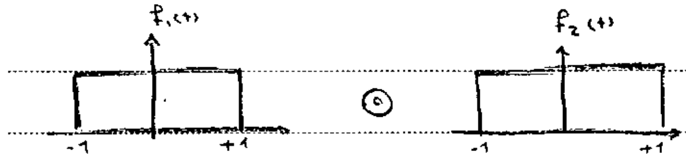
$R_{12}(\tau) = f_1(t) \odot f_2(t)$

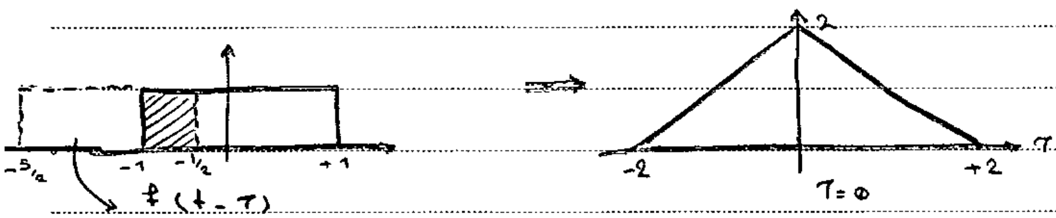
$\text{Conv} = f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) \cdot d\tau$

$$\boxed{R_{12}(\tau) = f_1(t) \circledast f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \cdot f_2(t-\tau) \cdot dt}$$

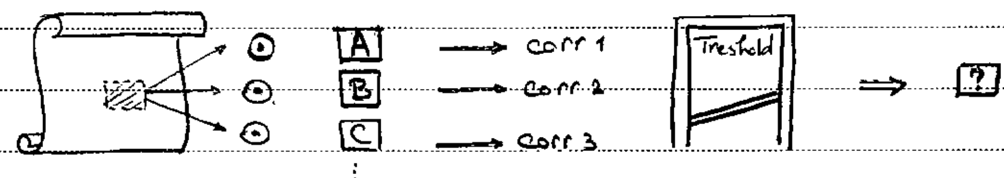
تغییر متغیر ندارد، تنها یکی از سیگنال‌ها به اندازهٔ « τ » شیفت پیدا کند.

Auto Correlation $= f_1(t) \odot f_2(t)$





☑ کاربرد در Pattern Recognition



$$\boxed{R_{12}(\tau) = f_1(t) * f_2(-t)\Big|_{t=\tau}}$$

* روابط conv , corr

* روابط فوریه تابع همبستگی

$f_1(t) \xleftrightarrow{F.T.} F_1(\omega)$

$f_2(t) \xleftrightarrow{F.T.} F_2(\omega)$

$$\mathcal{F}\{R_{12}(\tau)\} = F_1(\omega) . F_2(-\omega)$$

$$\mathcal{F}\{R_{21}(\tau)\} = F_1(-\omega) . F_2(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{R_{11}(\tau)\} = F_1(\omega) . F_1(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{R_{11}(\tau)\} = (F_1(\omega))^2 \iff f_1(t) : \text{Real} \longrightarrow F_1(-\omega) = F(\omega)^*$$

* پیدا کردن تبدیل فوریه توابع خاص

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

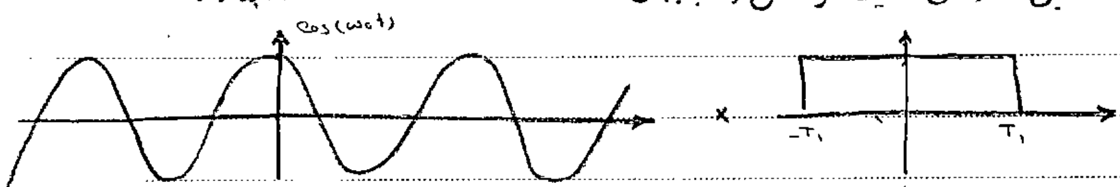
$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

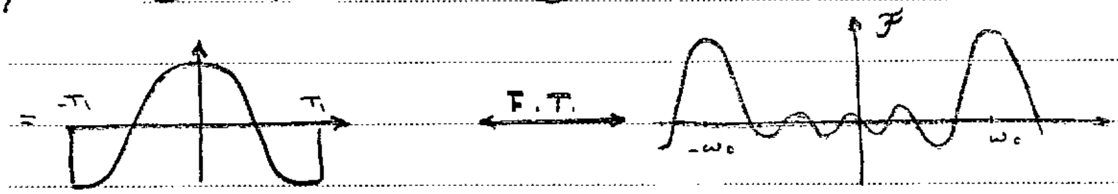
$$f(t)\cdot\cos(\omega_0 t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}F(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_0)$$

$$f(t)\cos(\omega_0 t) = f(t)\left\{\frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}f(t)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

با استفاده از خطی بودن تبدیل فوریه رابطه اثبات می‌شود.

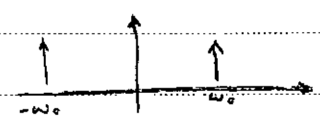
سیگنال سینوسی طیف فرکانس را جابجا می‌کند در Modulation کاربرد دارد.





$$\cos(\omega_0 t)\cdot P_{2T_1}(t) \xleftarrow{F.T.} \frac{1}{2}2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega-\omega_0)T_1}{\pi}\right)+\frac{1}{2}2T_1\,\mathrm{sinc}\left(\frac{(\omega+\omega_0)T_1}{\pi}\right)$$

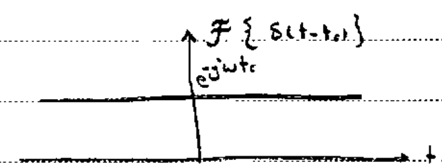
$\mathcal{F}(\cos(\omega_0 t))$:



$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$

$$\delta(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}$$

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow F(\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$$



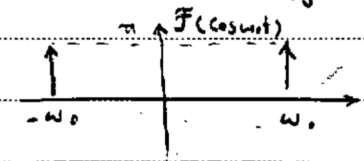
$$e^{\pm j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega\mp\omega_0)$$

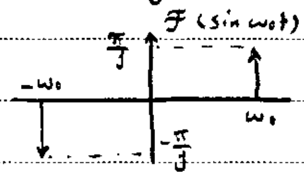
Subject:

Year. Month. Date. 37

$$\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\} = \pi\left(\delta(\omega+\omega_0) + \delta(\omega-\omega_0)\right)$$

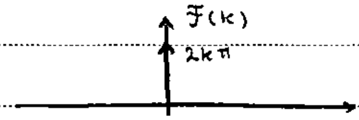
$$\mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \frac{1}{2j}\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\} = \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)\right)$$





$$\boxed{k \longleftrightarrow 2\pi k\,\delta(\omega)}$$

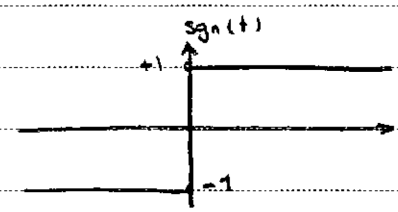
$\hookrightarrow$ cte



Signum Function

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$



$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a\to 0}\left[e^{-at}u(t) - e^{-at}u(-t)\right]$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\} = \lim_{a\to 0}\mathcal{F}\left\{\int_{0^+}^{+\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}\,dt - \int_{-\infty}^{0^-} e^{+at}e^{-j\omega t}\,dt\right\}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{j\omega+a} - \frac{1}{j\omega-a}\right] = \lim_{a\to 0}\frac{-2j\omega}{\omega^2+a^2} = \boxed{\frac{2}{j\omega}}$$

Unit Step Function

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)$$

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(t)\}$$

$$= \frac{1}{2}2\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{j\omega}$$

$$\boxed{u(t) \longleftrightarrow \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

* I) سیگنال $f(t)$ تبدیل فوریه دارد اگر انرژی محدود داشته باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \, dt < \infty$$

II) شرط دیریکله

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \, dt < \infty$$

شرط لازم برای موجود بودن سری فوریه است.

* تبدیل فوریه برای توابع متناوب

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi \, \delta(\omega-\omega_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t} \longleftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \, a_k \, \delta(\omega-\omega_0)$$

با توجه به خطی بودن تبدیل فوریه ثابت می‌شود:

اگر a_k را ضرایب فوریه در نظر بگیریم ، تبدیل فوریه سری فوریه عبارتست از:

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(\omega-\omega_0)}$$

$$x(t) = \underbrace{\sin(t)}_{\text{periodic}} + \underbrace{\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)}_{\text{periodic}}$$

$$\sin(t) = \frac{1}{2}\left\{e^{jt} - e^{-jt}\right\} \xrightarrow{F.T} a_1 = \frac{1}{2j} , \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

$$\mathcal{F}\{\sin(t)\} = 2\pi \cdot \frac{1}{2j} \, \delta(\omega-1) + 2\pi \cdot \frac{-1}{2j} \cdot \delta(\omega+1)$$

$$= \frac{\pi}{j} \, \delta(\omega-1) - \frac{\pi}{j} \, \delta(\omega+1)$$

$$= \pi j \, \delta(\omega+1) - \pi j \, \delta(\omega-1)$$

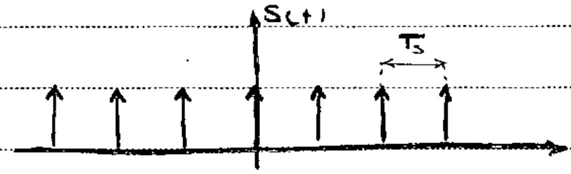
$$\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} e^{j(\sim)} + \frac{1}{2} e^{-j(\sim)} = \underbrace{\frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{4}}}_{a_1} \cdot e^{j2\pi t} + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}}_{a_{-1}} \cdot e^{-j2\pi t}$$

$$X(\omega) = \pi j\,(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)) + \pi e^{+j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega-2\pi) + \pi e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(\omega+2\pi)$$

Sampling ☑

برای نمونه برداری از قطاری از سیگنال‌های ضربه واحد استفاده می‌شود (سیگنال شانه (comb))

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$



$$S(\omega) = \sum 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

$\omega_0 = 2\pi / T_s$ — متناوب ω_0

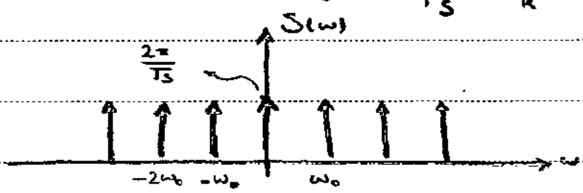
ضرایب سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_{<T_s>} s(t)\cdot e^{-j\omega_0 kt}\,dt$$

$$= \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} s(t)\cdot e^{-j\omega_0 kt}\cdot dt = \frac{1}{T_s}$$

متناوب لذا داریم

$$S(\omega) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \frac{2\pi}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$



$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T_s}}$$

☑ خاصیت دوگانی برای ضرب

$$x(t) * h(t) \xleftrightarrow{F.T.} X(\omega)\cdot H(\omega)$$

$$x(t)\cdot v(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi}\{X(\omega) * V(\omega)\}$$

اثبات:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(\omega) * V(\omega)\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} X(\gamma)\cdot V(\omega-\gamma)\,d\gamma\right\}$$

تعریف تبدیل فوریه معکوس $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\gamma)V(\omega-\gamma)\,d\gamma\right]\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega$

Subject:
Year.   Month.   Date.

$h = \omega - \gamma$ تغییر متغیر
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\gamma) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} V(h)\, e^{j(h+\gamma)} . dh \right] . d\gamma$$

تعریف فوریه معکوس $v(\omega)$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(\gamma) . e^{j\gamma t} . dv \times v(t)$$

تعریف فوریه معکوس $X(\omega)$
$$= 2\pi . v(t) . x(t)$$

کاربرد آن در مدولاسیون است.

☑ کانولوشن در سیگنال ضربه واحد

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$$
$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

☑ مدولاسیون در رادیو

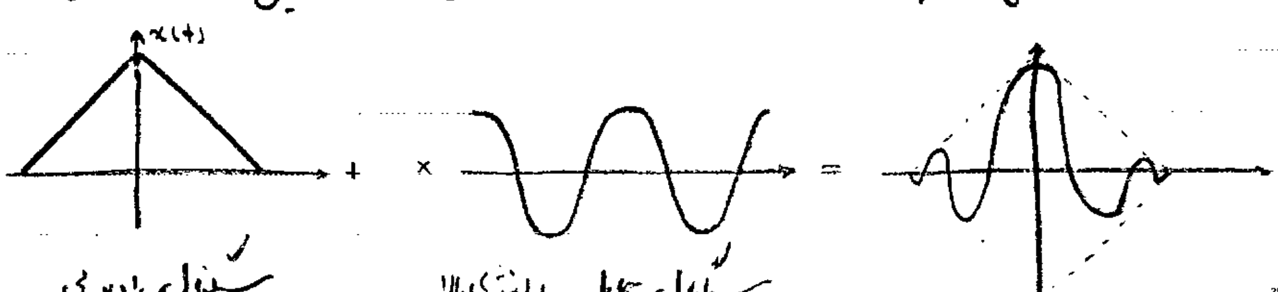
AM : Amplitude Modulation
FM : Frequency Modulation

$x(t) \longrightarrow$ signal

AM >>> $x(t) \longrightarrow \otimes \longrightarrow x(t) . \cos(\omega_c . t)$

carrier signal : $\cos(\omega_c . t)$

$:\omega_c$ carrier frequency ـــ معمولاً مقدار بزرگی است. سیگنال $x(t)$ را مدوله می‌کند



سیگنال رادیویی $x(t)$ | سیگنال حامل با انرژی بالا $\cos(\omega_c . t)$ | $x(t) . \cos(\omega_c . t)$

$x(t) \sim$ band limited $\qquad X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$

voice $\sim \pm 8$ KHz

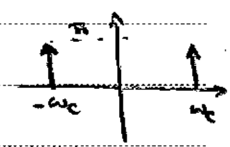
music $\sim \pm 20$ KHz

Transmiter

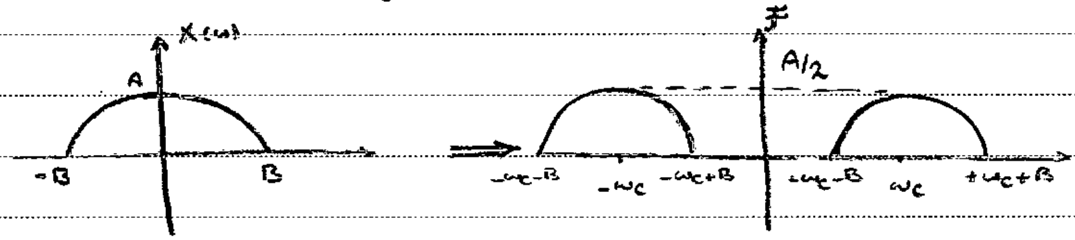
$$\mathcal{F}\{x(t).\cos(\omega_c.t)\} = \frac{1}{2\pi}\left\{X(\omega) * \mathcal{F}\{\cos(\omega_c.t)\}\right\}$$

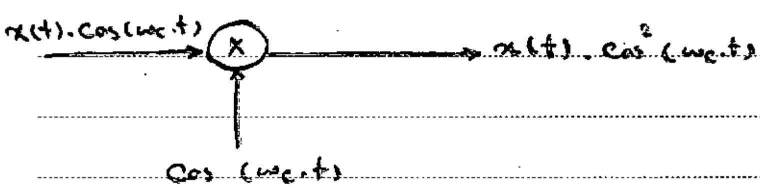
$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_c.t)\} \xrightarrow{\text{periodic}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta(\omega - k\omega_c)$$

$$= \pi\left(\delta(\omega-\omega_c) + \delta(\omega+\omega_c)\right)$$



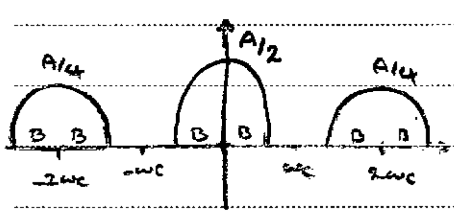
$$\mathcal{F}\{x(t).\cos(\omega_c.t)\} = \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_c) + X(\omega+\omega_c)\right]$$





Reciever

$$\mathcal{F}\{x(t).\cos^2(\omega_c.t)\} = \mathcal{F}\left\{x(t).\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2}\right\} =$$



$$\mathcal{F}\left\{\frac{x(t)}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{x(t).\cos(2\omega_c t)}{2}\right\} =$$

$$\frac{1}{2}X(\omega) + \frac{1}{4}\left[X(\omega+2\omega_c) + X(\omega-\omega_c)\right]$$

برای بدست آوردن سیگنال اصلی از یک فیلتر پایین گذر استفاده می‌کنیم. (LPF)

چون دامنه نصف شده است آن را با فیلتر جبران می‌کنیم، gain آن را برابر ۲ قرار می‌دهیم

Filter output: $y(t) = r(t) * h_{LP}(t)$

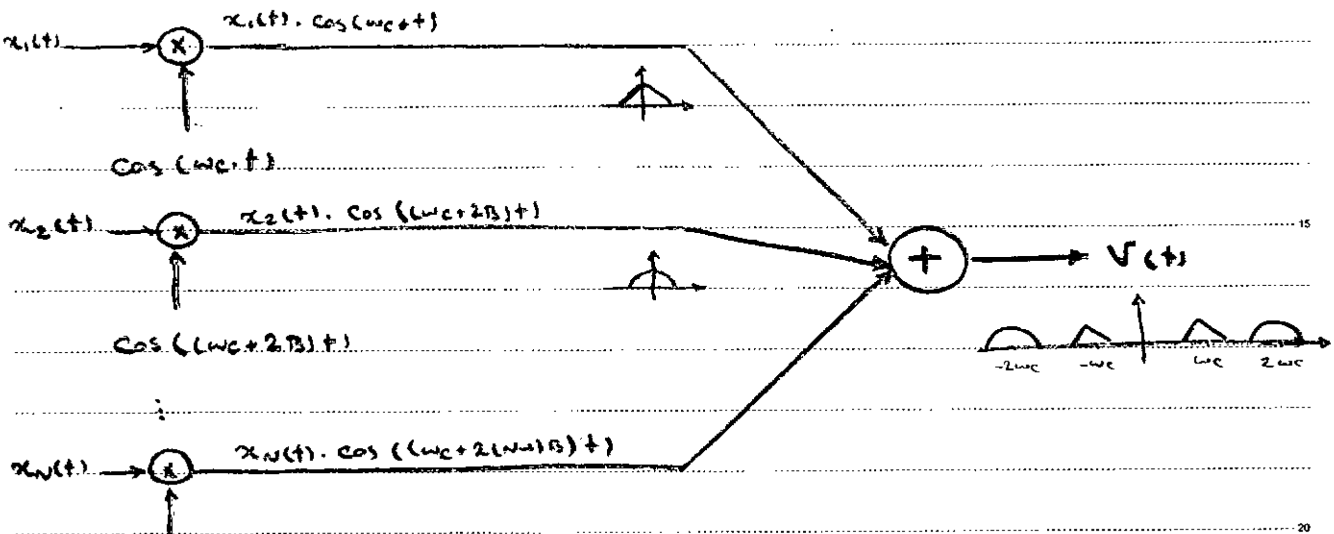
$Y(\omega) = R(\omega) \cdot H_{LP}(\omega)$

$$H_{LP}(\omega) = \begin{cases} 2 & |\omega| < B \\ 0 & o.w \end{cases} \rightarrow \text{gain} = 2$$

برای ارسال مجموعه سیگنال $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)\}$ روی باند فرکانسی به روش AM روش کاری متداولی وجود دارد:

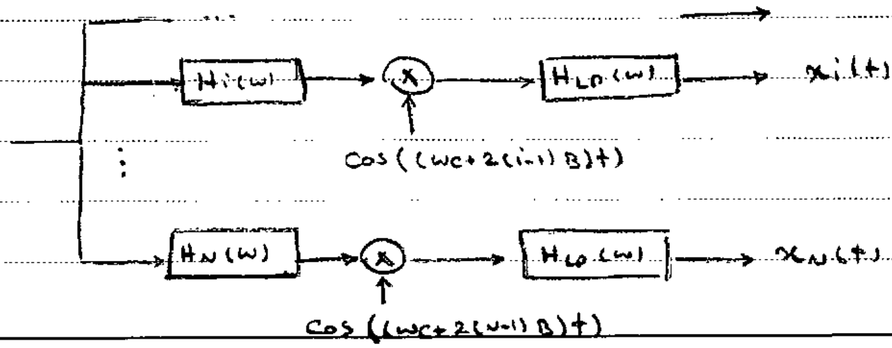
- FDM : Frequency Division Multiplexing

$x_i \sim |X_i(\omega)| < B$



$$V(t) = \sum_{i}^{N} x_i(t) \cdot \cos\left[(\omega_c + 2(i-1)B)t\right]$$

Demodulator:



گردان،

$$H_i(\omega) = \begin{cases} 1 , & \omega_c + 2(i+2(i-1.5)B) < |\omega| \leq \omega_c + 2(i-0.5)B \\ 0 , & o.w \end{cases} \qquad i = 1, \dots, N$$

$$H_1(\omega) = \begin{cases} 1 , & \omega_c \leq |\omega| \leq \omega_c + B \\ 0 , & o.w \end{cases}$$

$x(t) \longrightarrow$ LTI (filter) $\longrightarrow y(t)$

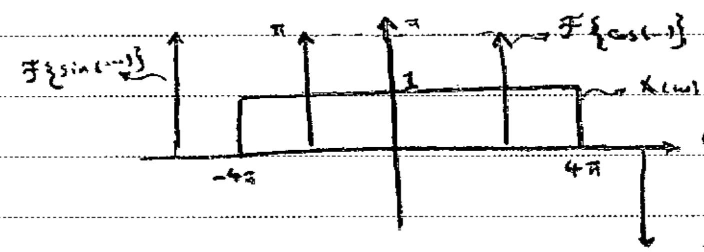
$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$

$h(t) = \dfrac{\sin(4\pi t)}{\pi t}$

$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$H(\omega) =$ Low Pass Filter

$X(\omega) = \pi\left(\delta(\omega+2\pi) + \delta(\omega-2\pi)\right) + \pi j\left(\delta(\omega+6\pi) - \delta(\omega-6\pi)\right)$



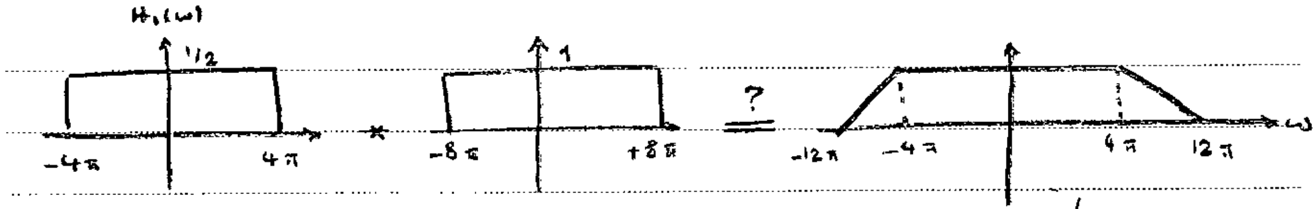
$\xrightarrow[\text{در محدوده است}]{\text{فقط سیگنال سینوسی}}$ $y(t) = \cos(2\pi t)$

$x(t) = \cos(2\pi t) + \sin(6\pi t)$

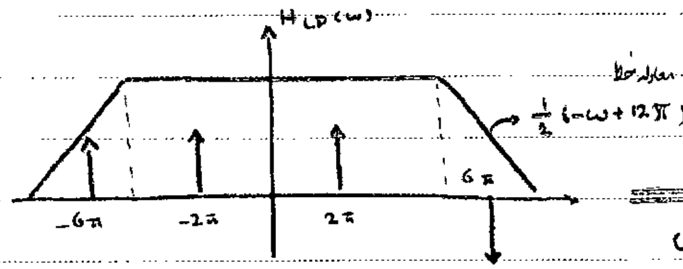
$h(t) = \dfrac{1}{\pi t^2} \sin(4\pi t) \cdot \sin(8\pi t)$

$h(t) = \underbrace{\dfrac{\sin(4\pi t)}{\pi t}}_{h_1(t)} \cdot \underbrace{\dfrac{\sin(8\pi t)}{\pi t}}_{h_2(t)} \cdot \pi \xleftrightarrow{F.T.} H(\omega) = \dfrac{\pi}{2\pi}\left[H_1(\omega) * H_2(\omega)\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )



با رسم سیگنال ورودی به صورت توأم :



$\xrightarrow{\text{ورودی شکل}}$ $y(t) = 4\pi.\cos(2\pi t) + 3\pi\sin(6\pi t)$

$p(t)$ ~ periodic

$x(t).p(t)$ @!#:: * €

$\mathcal{F}\{x(t).p(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right]$ خاصیت مدولاسیون

$P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\omega-\omega_0 k)$ توابع متناوب

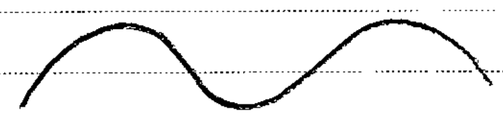
$\mathcal{F}\{x(t).p(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \sum \sim\right] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k.X(\omega-k\omega_0)$

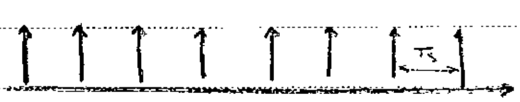
حالت خاص :

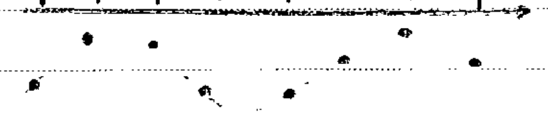
$p(t) = \cos(\omega_c t)$

$\mathcal{F}\{x(t).p(t)\} = \frac{1}{2}X(\omega-\omega_c) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_c)$

کاربرد : بحث نمونه برداری



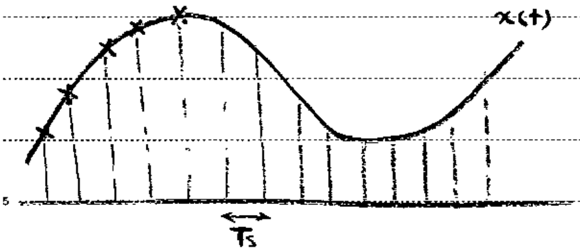




$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_s).\delta(t-t_s)$

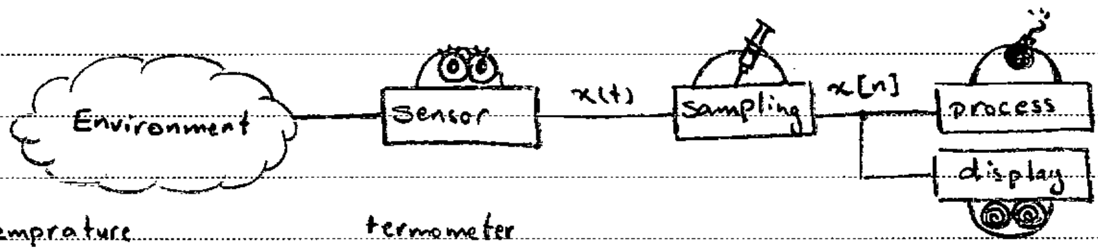
Sampling

* نمونه‌برداری :



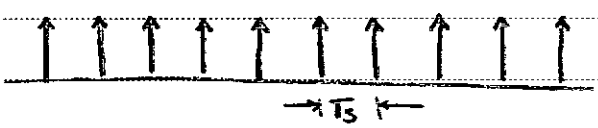
Ts : Sampling Period

$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$: Sampling Frequency



temprature termometer

ECG EG



p(t) ~ periodic (Ts) *

$$x(t).\delta(t-t_0) = x(t_0).\delta(t-t_0)$$

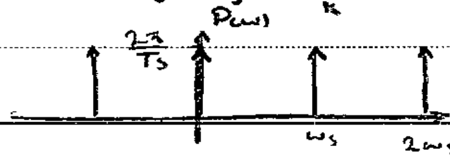
$$x(t).p(t) \xleftrightarrow{F.T.} \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * P(\omega)\right]$$ خاصیت مدولاسیون

p(t) – periodic $\longrightarrow$ $\mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k . \delta(\omega-\omega_0 k)$

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_{\langle T_s\rangle} p(t).e^{-jk\omega_0 t}.dt = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t).e^{-jk\omega_s t}.dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_s}\int_{-\frac{T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} \delta(t).e^{-jk\omega_s . 0}.dt = \frac{1}{T_s}$$

$$P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_s}\,\delta(\omega-\omega_0 k)$$



Subject:
Year. Month. Date.

$S(t) = x(t) \cdot p(t)$

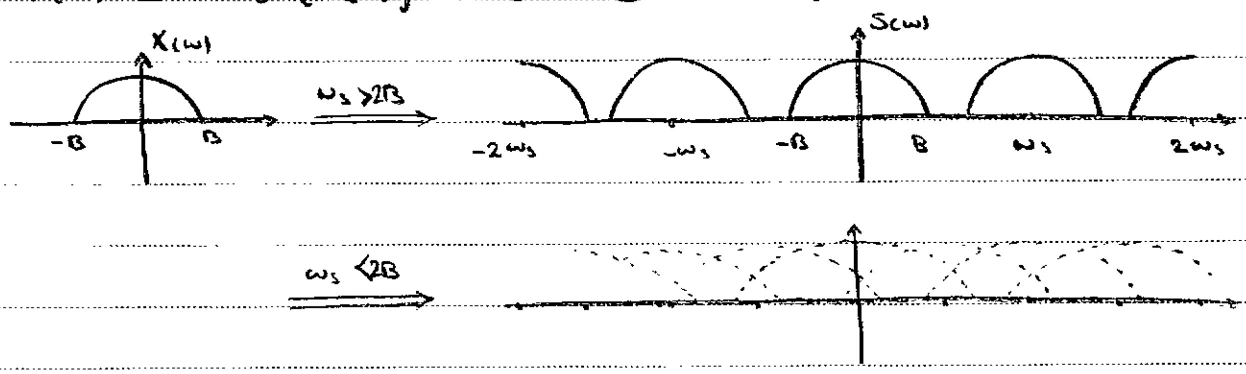
$$\mathcal{F}\{S(t)\} = \frac{1}{2\pi}\left[X(\omega) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T_s}\,\delta(\omega - \omega_0 k)\right]$$

$X(\omega) * \delta(\omega - \ell\omega_s) = X(\omega - \ell\omega_s)$ خاصیت Shift

$$\boxed{S(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)}$$

*

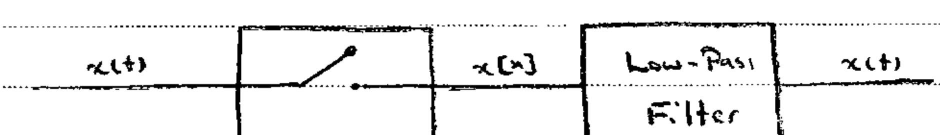
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ & Band Limited



* تغییر نمونه برداری نایکوییست

Nyquist Sampling Rate: $\boxed{\omega_s \geq 2B}$

برای فراهم کردن شرایط استفاده از این تغییر می‌توان از فیلتر پایین گذر استفاده کرد.



بازده (gain) فیلتر باید T_s باشد تا جبران کند.

$x_s(t) = x(t)p(t) \xleftrightarrow{F.T} X_s(\omega) = \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(\omega - k\omega_s)$

Subject:
Year. Month. Date. 42

برای طراحی LPF داریم:

$$H_{LP}(\omega)=\begin{cases} T_s & |\omega|<B \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$x(t)\longrightarrow \boxed{h_{LP}(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{H_{LP}(\omega)\}=h_{LP}(\omega)=\frac{BT_s}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Bt}{\pi}\right)$$

$$\begin{cases} x_s(t)=x(t)\cdot p(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(t-kT_s) \\ y(t)=x(t) \quad \text{باید} \end{cases}$$

$$y(t)=x_s(t)*h_{LP}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x_s(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\delta(\tau-kT_s)\right]\cdot h(\tau-t)\cdot d\tau$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau-kT_s)\cdot h(\tau-t)\cdot d\tau$$

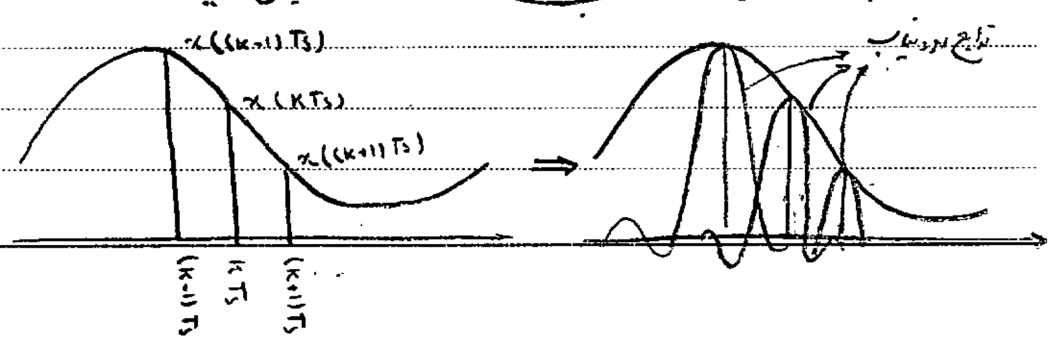
$$x(t-t_0)\cdot\delta(t-t_1)=x(t_1-t_0)\cdot\delta(t-t_0)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,h(t-kT_s)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\cdot\left[\frac{BT_s}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{B(t-kT_s)}{\pi}\right)\right]$$

$$=\frac{BT_s}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\cdot\text{sinc}\left(\frac{B(t-kT_s)}{\pi}\right)$$

این رابطه، معادل درونیابی (interpolation) از سیگنال اولیه است.



$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega)$ ⟶ پیوسته، مختلط *

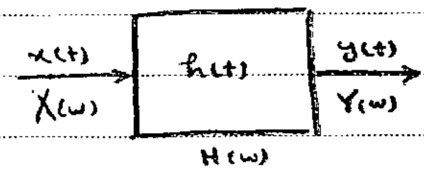
$X(\omega) = R(\omega) + j\cdot I(\omega)$ real – imaginary

$= |X(\omega)| \exp\{j \measuredangle X(\omega)\}$ magnitude – phase

$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

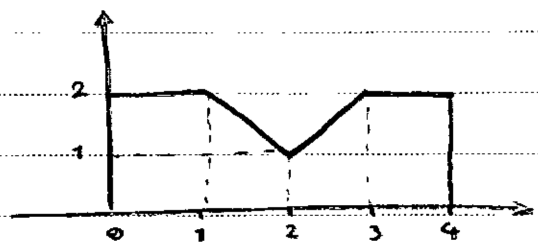
$|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$

$\measuredangle Y(\omega) = \measuredangle X(\omega) + \measuredangle H(\omega)$



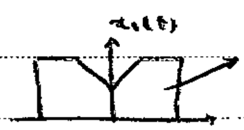
Transfer Function : $H(\omega) = \dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

voice : فاز سیگنال اطلاعات دارد و می‌تواند تأخیر داشته باشد ← فاز مهم است.



A) Find $\measuredangle X(\omega)$

Real & Even $\xleftrightarrow{F.T}$ Real & Even



Real ⟹ $\measuredangle 0$

$x(t) = x_1(t-2) \xleftrightarrow{F.T} X(\omega) = e^{-j2\omega} \cdot X_1(\omega)$

$\measuredangle -2\omega$

B) Find $X(0) \equiv$ DC Term

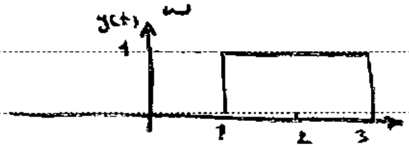
$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \longrightarrow X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot dt =$ مساحت زیر منحنی

C) $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\, \frac{2\sin(\omega)}{\omega}\, e^{j2\omega} \cdot d\omega$

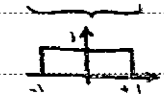
خاصیت پارسوال : $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \cdot d\omega$

حالت کلی خاصیت پارسوال : $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) \cdot d\omega$

$Y^*(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \cdot e^{j2\omega} \longrightarrow Y(\omega) = \frac{2\sin\omega}{\omega} \cdot e^{-j2\omega}$

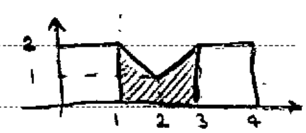


$\longleftarrow$



time shift

$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) \cdot Y^*(\omega) \cdot d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) \cdot dt = 2\pi \times$



$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \Longrightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ *

$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$

$\sum a_k \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\} = \sum b_k \cdot \mathcal{F}\left\{\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right\}$

$Y(\omega) \sum a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum b_k (j\omega)^k$

$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} = \frac{b_N (j\omega)^N + b_{N-1} (j\omega)^{N-1} + \dots + b_0}{a_M (j\omega)^M + a_{M-1} (j\omega)^{M-1} + \dots + a_0}$

$\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + y = \frac{dx}{dt} + 3x$ ☑

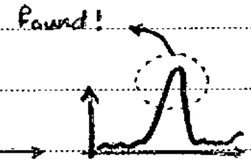
$H(\omega) = \frac{(j\omega) + 3}{(j\omega)^2 + 3(j\omega) + 1} \longrightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$

Correlation: Application in Object Detection

- Character
- Shapes
- etc.

target

image $\circledast$ target $\longrightarrow$



$M \times N$ $\quad$ $L \times k$

2D D.T.:

$$R[k,\ell] = x_1[m,n] \circledast x_2[m,n] = \sum_n \sum_m x_1[m,n]\, x_2[m+k, n+\ell]$$

Fourier Domain $\longrightarrow$

Modulation: Data Transfer

Modulator: $x(t) \longrightarrow x(t)\cos(\omega_c t)$

Demodulator: $x(t)\cos(\omega_c t) \longrightarrow x(t) \cdot \cos^2(\omega_c t) \xrightarrow{\text{low pass filter}}$

Plot: each level

FDM: $x_1(t), \ldots, x_N(t)$

Plot: each level

ω_c changes: how ω_c affects modulation

Subject :

Year . Month . Date . 44

$$\frac{dy(t)}{dt} + a y(t) = a x(t) - \frac{dx}{dt}$$

$$H(\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \longrightarrow |H(\omega)| = 1$$

$$\longrightarrow \measuredangle H(\omega) = \tan^{-1}\left(-\frac{\omega}{a}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$= -2\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$H(\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega} = -1 + \frac{2a}{a + j\omega} \longrightarrow h(t) = -\delta(t) + 2a e^{-at} u(t)$$

- $\hat{S}_1$ $\quad x(t) = e^{-bt} u(t) \longrightarrow y(t) = ?$

1) Convolution

2) $X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega + b} \longrightarrow Y(\omega) = \dfrac{a - j\omega}{a + j\omega} \cdot \dfrac{1}{j\omega + b} = \dfrac{A}{a + j\omega} + \dfrac{B}{b + j\omega}$

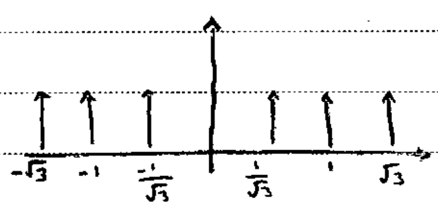
$$A = (j\omega + a)\, Y(\omega)\Big|_{j\omega = -a} = \frac{2a}{b - a} \longrightarrow y(t) = A e^{-at} u(t) + B e^{-bt} u(t)$$

$$B = (j\omega + b)\, Y(\omega)\Big|_{j\omega = -b} = \frac{a + b}{a - b}$$

- $\hat{S}_1$ $\quad x(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right) + \cos(t) + \cos(\sqrt{3}\, t)$

$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \longrightarrow |Y(\omega)| = |X(\omega)|$



$\measuredangle H(\omega) = -2\tan\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad , a = 1$ $\qquad$ باتوجه $h(t)$ تمام‌گذر است :

$$-2\tan^{-1}(1) = -2\,\frac{\pi}{4}$$

$$-2\tan^{-1}(\sqrt{3}) = -2\,\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow y(t) = \cos\left(\frac{t}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\sqrt{3}\,t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$-2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -2\,\frac{\pi}{6}$$

PAPCO

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

$$H(\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} = \frac{A}{j\omega+3} + \frac{B}{j\omega+1} \longrightarrow A, B = ?$$

$$h(t) = A e^{-3t} u(t) + B e^{-t} u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{b_M (j\omega)^M + b_{M-1}(j\omega)^{M-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_N (j\omega)^N + a_{N-1}(j\omega)^{N-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} = \frac{\sum_0^M b_k (j\omega)^k}{\sum_0^N a_k (j\omega)^k}$$

رابطه ی

$$= \frac{b_M \prod_{k=0}^{M} (j\omega + \lambda_k)}{a_N \prod_{k=0}^{N} (j\omega + v_k)}$$

λ_k : k امین ریشه چند جمله ای صورت

v_k : k امین ریشه چند جمله ای مخرج

λ_i : Real & Simple

$$\prod_{k=0}^{M} (j\omega + \lambda_k)$$

λ_i : Real & Repeated

$$\left[\prod_{k=0}^{M-m} (j\omega + \lambda_k)\right] (j\omega + \lambda_i)$$

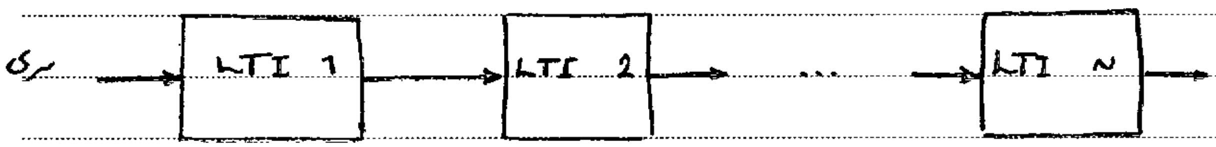
λ_r : Complex

$$(j\omega + \lambda_r)(j\omega + \lambda_r^*) = (j\omega)^2 + j\omega(\lambda_r + \lambda_r^*) + \lambda_r \cdot \lambda_r^*$$
$$= (j\omega)^2 + 2\,\mathrm{Re}\{\lambda_r\} j\omega + |\lambda_r|^2$$

حالت کلی:

$$H(\omega) = \frac{b_M}{a_N} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{P} [\overbrace{\beta_{0k}}^{|\lambda_r|^2} + \overbrace{\beta_{1k}}^{2\mathrm{Re}\{\lambda_r\}}(j\omega) + (j\omega)^2] \cdot \prod_{k}^{M-2P} (j\omega + \lambda_k)}{\prod_{k=1}^{Q} [\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2] \cdot \prod_{k=0}^{N-2Q} (j\omega + v_k)}$$

kourosh_e_kabir@Yahoo.com



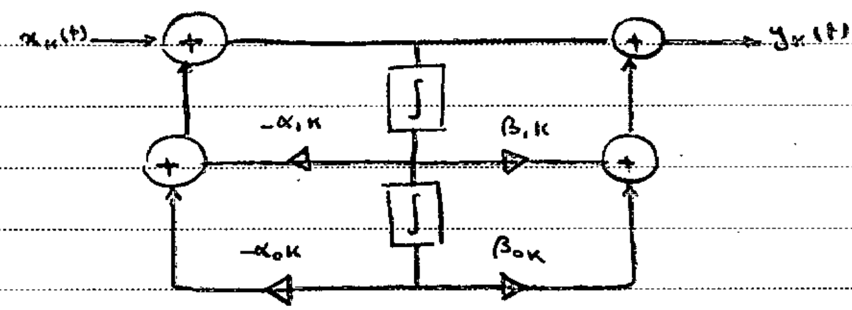
$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \cdots * h_N(t)$$

$$H(\omega) = H_1(\omega) \cdot H_2(\omega) \cdot \cdots \cdot H_N(\omega)$$

$$H_k(\omega) = \frac{\beta_{0k} + \beta_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2}{\alpha_{0k} + \alpha_{1k}(j\omega) + (j\omega)^2} = \frac{Y_k(\omega)}{X_k(\omega)}$$

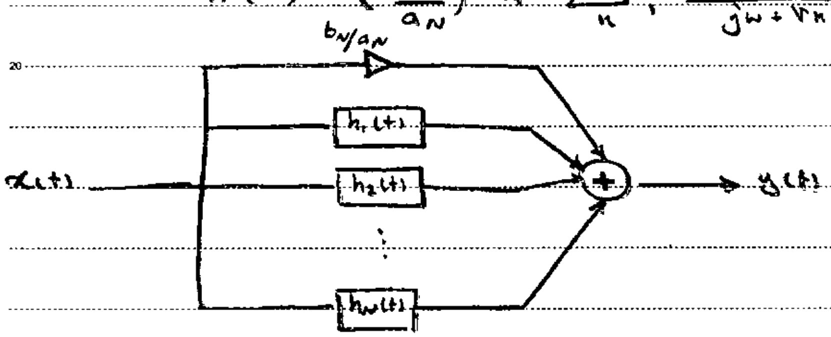
$$\frac{d^2 y_k(t)}{dt^2} + \alpha_{1k}\frac{d y_k(t)}{dt} + \alpha_{0k} y_k(t) = \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + \beta_{1k}\frac{d x_k(t)}{dt} + \beta_{0k} x_k(t)$$

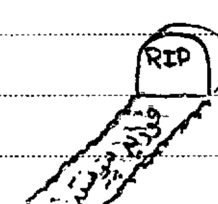
Direct Form II :



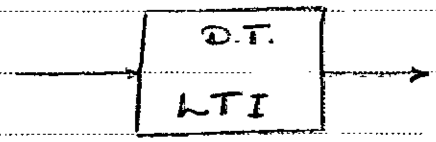
$M = N$

$$H(\omega) = \left(\frac{b_N}{a_N}\right) + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{j\omega + r_k}$$





تبدیل فوریه زمان گسسته



*

$$x[n] * h[n] = y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\, h[n-m]$$

$e^{j\omega t} \longrightarrow$ eigen function * تابع ویژه

exponential : z^n , $z \in \mathbb{C}$

$x[n] = z^n$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] . x[n-m] = \sum h[m] . z^{n-m} = z^n \underbrace{\sum h[m] . z^{-m}}_{H(z)}$$

$$\begin{cases} z^n & : \text{eigen function} \\ H(z) & : \text{eigen value} \longrightarrow \text{magnitude} + \text{phase} \end{cases}$$

* ترکیب سیگنالهای نمایی

$x[n] = \sum a_k . z_k^{\,n}$

$y[n] = \sum a_k . H(z_k) . z_k^{\,n}$ با توجه به خطی بودن

$x[n] \sim$ periodic $\Longleftrightarrow$ $x[n] = x[n+N]$, $N \in \mathbb{Z}^+$ *

$e^{j\Omega_0 n} \sim$ periodic $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\Omega_0}{2\pi} = \dfrac{m}{N}$

مجموعه سیگنالهای نمایی مختلط متناوب : $\phi_k[n] = e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$\phi_k[n] = \phi_{N+k}[n]$ $\longrightarrow$ مشابه C.T.

Subject:
Year. Month. Date. 46

$x[n] \sim$ periodic (N)

$x[n] = \sum_{k} a_k \cdot \phi_k[n] = \sum_{k} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

گردش: $k = 0 \sim N-1$ یا $1 \sim N$ یا ... یا $<N>$

یادآوری (C.T.): $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$ و $a_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(T)} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$

حال برای محاسبه a_k در حالت D.T.:

$$\begin{cases} n=0 & x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}(0)} \\ n=1 & x[1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}(1)} = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{N}} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \\ \vdots & \\ n=N-1 & x[N-1] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}(N-1)} = a_0 + \dots + a_{N-1} \cdot e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}} \end{cases}$$

N معادله برای N مجهول (a_k) $\longrightarrow$ ضرایب a_k بدست می‌آید

* تناوب در a_k

(I) $k = 0 \sim N-1$ $\quad a_0, \dots, a_{N-1}$

(II) $k = 1 \sim N$ $\quad a_1, \dots, a_N$

(III) $k = 2 \sim N+1$ $\quad a_2, \dots, a_{N+1}$

(I) $\Rightarrow$ $x[n] = a_0 \cdot e^{j(0)\frac{2\pi}{N}n} + a_1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \dots + a_{N-1} \cdot e^{j(N-1)\frac{2\pi}{N}n}$

(II) $\Rightarrow$ $x[n] = a_1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \dots + a_N e^{jN\frac{2\pi}{N} \cdot n}$

$\Rightarrow a_0 = a_N$

(II) و (III) $\Rightarrow a_1 = a_{N+1}$

ضرایب سری فوریه گسسته متناوب است.
$$\Rightarrow \boxed{a_K = a_{K+N}}$$

* تناوب a_K

$x[n] \sim \text{periodic } (N)$

$$x[n] = \sum_{K=\langle N\rangle} a_K \cdot e^{jK(\frac{2\pi}{N})n} \Longrightarrow$$

$$e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} \left\{ x[n] = \sum_{K} a_K \cdot e^{jK(\frac{2\pi}{N})n} \right\} \Longrightarrow$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jr(\frac{2\pi}{N})n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{K=\langle N\rangle} a_K \cdot \underbrace{e^{jK\frac{2\pi}{N}n} \cdot e^{-jr\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$= \sum_{n=\langle N\rangle} \sum_{K=\langle N\rangle} a_K \cdot e^{j(K-r)\frac{2\pi}{N}n}$$

$$= \sum_{K=\langle N\rangle} a_K \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(K-r)\frac{2\pi}{N}n} \quad \boxed{I}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jK\frac{2\pi}{N}}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jK\frac{2\pi}{N}n}\right) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jK\frac{2\pi n}{N}} = \begin{cases} N & , K = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \dfrac{1-\left(e^{jK\frac{2\pi}{N}}\right)^N}{1-e^{jK\frac{2\pi}{N}}} = 0 & , \text{o.w} \end{cases} \quad \boxed{II}$$

$$\boxed{II} \Longrightarrow \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(K-r)\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} N & , K = r \\ 0 & , K \neq r \end{cases}$$

$\boxed{I}$ $\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,.\,e^{-jr\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = a_r(N)$

ضرایب طیفی

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\,.\,e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\,.\,e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}}$$

$$\boxed{a_k \sim \text{periodic} \iff a_k = a_{k+N}}$$

$x[n] = \sin\left[\frac{\pi(n-1)}{4}\right]$

periodic ? $\Rightarrow \sin(\Omega_0 n) \Rightarrow \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$

$\frac{\pi/4}{2\pi} = \frac{1}{8} \in \mathbb{Q} \Rightarrow N=8$ ✓ periodic

$a_k ? \Rightarrow x[n] = \frac{1}{2j}\left\{\exp\left(j\frac{\pi(n-1)}{4}\right) - \exp\left(-j\frac{\pi(n-1)}{4}\right)\right\}$

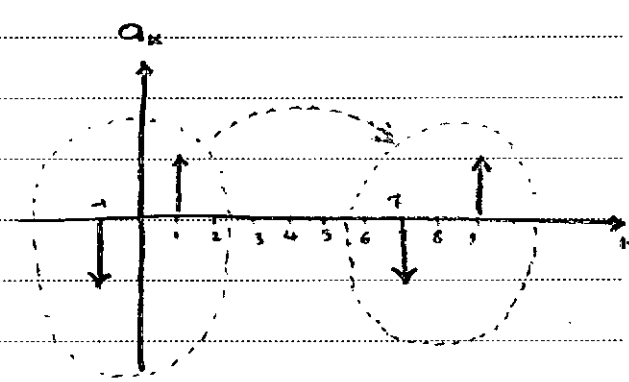
$= \frac{1}{2j}\left\{\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right).\exp\left(j(1)\frac{2\pi}{8}n\right) - \exp\left(j\frac{\pi}{4}\right).\exp\left(j(-1)\frac{2\pi}{8}n\right)\right\}$

$\Rightarrow$ $x[n]$ مثل رابطه ی

$k=1 \longrightarrow a_1 = \frac{1}{2j}\exp\left(-j\frac{\pi}{4}\right)$

$k=-1 \longrightarrow a_{-1} = -\frac{1}{2j}\exp\left(j\frac{\pi}{4}\right)$

$a_1 = a_9 \;,\; a_{-1} = a_7 \;, \ldots$



Subject:

Year. Month. Date. ( )

$x[n] \sim$ periodic (6)

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad -2 \leq n \leq 3$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{3} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{6}n}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}n} = \frac{1}{6} \sum_{n=-2}^{3} \left[\frac{1}{2} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right]^n$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{m=0}^{5} \left[\frac{1}{2} e^{jk\frac{\pi}{3}}\right]^{m-2} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4} e^{jk\frac{4\pi}{6}}\right) \sum_{m=0}^{5} \left(\frac{1}{2} e^{-jk\frac{2\pi}{6}}\right)^m$$

$$= \frac{4}{6} \exp\left(jk\frac{4\pi}{6}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cancelto{1}{\exp\left(-jk\frac{2\pi}{6}\cdot 6\right)}}{1 - \frac{1}{2}\exp\left(-jk\frac{2\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} \exp\left(jk\frac{2\pi}{3}\right) \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\exp\left(jk\frac{2\pi}{3}\right)\left[\exp\left(-jk\frac{4\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\exp(-jk\pi)\right]}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{\exp\left(-jk\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}(-1)^k}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{63}{96} \times \frac{1}{\exp\left(-jk\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}(-1)^k}$$

یک جلسه غیبت داشتم.

if $\tilde{x}[n] \sim$ periodic (N) $\Rightarrow$ $\tilde{x}[n] = x[n+N]$ سنتز *

$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$ $\phi_k[n]$

$a_k \sim$ periodic (N) $\Rightarrow a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$

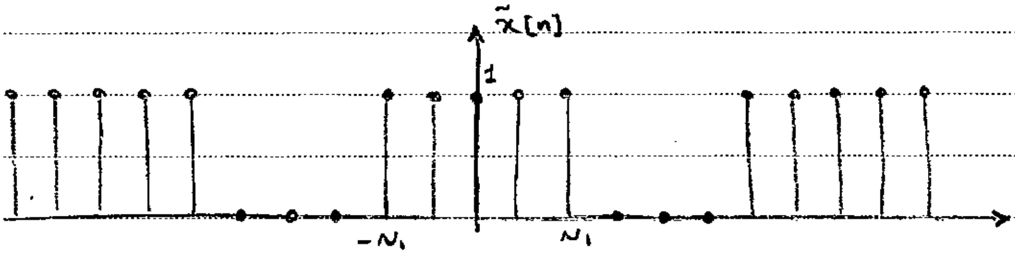
ادامه خواص *

$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{F.S.} a_k$

$\tilde{z}[n] \xleftrightarrow{F.S.} b_k$

$\tilde{y}[n] = \tilde{x}[n] \cdot \tilde{z}[n] \xleftrightarrow{F.S.} c_k = a_k * b_k$ (periodic conv)

$= \sum_{\ell=\langle N\rangle} a_\ell \cdot b_{k-\ell}$



$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \longrightarrow a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} \tilde{x}[n]\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} (1) \exp(-jk\frac{2\pi}{N}n) \xrightarrow{m=n+N_1} a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} (\exp(-jk\frac{2\pi}{N}))^{m-N_1}$

$a_k = \frac{1}{N} \exp(jk\frac{2\pi}{N}N_1) \sum_{m=0}^{2N_1} (\exp(-jk\frac{2\pi}{N}))^m = \frac{\exp(jk\frac{2\pi}{N}N_1)}{N} \left\{ \frac{1-\exp(-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1))}{1-\exp(-jk\frac{2\pi}{N})} \right\}$

$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\exp(jk\frac{2\pi}{N}N_1) - \exp(-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1-N_1))}{1-\exp(-jk\frac{2\pi}{N})}$

$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\exp(jk\frac{2\pi}{2N})\left\{\exp(+jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2})) - \exp(-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2}))\right\}}{\exp(-jk\frac{2\pi}{2N})\left\{\exp(jk\frac{2\pi}{2N}) - \exp(-jk\frac{2\pi}{2N})\right\}} \times \left(\frac{2j}{2j}\right)$

$a_k = \frac{1}{N} \times \frac{\sin(k\frac{2\pi}{N}(N_1+\frac{1}{2}))}{\sin(k\frac{2\pi}{2N})}$

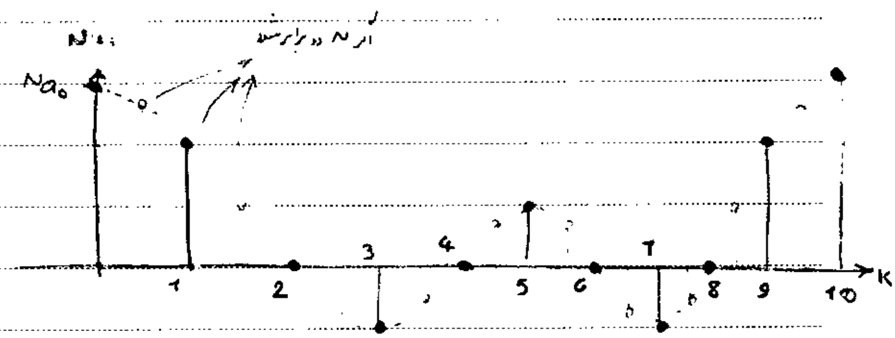
Subject:
Year. Month. Date. ( )

$k=0 \xrightarrow{\text{DC Term}} a_k = \frac{2N_1+1}{N} \longrightarrow k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & , \; k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\[2ex] \dfrac{\sin\left(2\pi k\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{2\pi k}{2N}\right)} \times \dfrac{1}{N} & , \; k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

① $N_1 = 2 \;,\; N = 10$

$$N.a_k = \left.\frac{\sin\left(\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

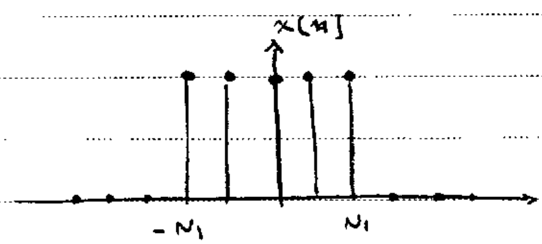


$\rightarrow \frac{2\pi}{N} \leftarrow$

$N \longrightarrow \infty$

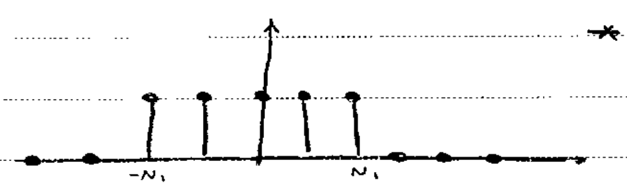
$\tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$

$N.a_k \longrightarrow \dfrac{\sin\left(\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} = X(\Omega)$



↳ Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

$x[n]$ — Non-periodic



از سیگنال غیرمتناوب $x[n]$ می‌توان سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را به وجود آورد به طوری که $\tilde{x}[n]$ ، $x[n]$ در یک دوره تناوب مشترک باشند

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \cdot \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-\frac{N}{2}}^{+\frac{N}{2}} \tilde{x}[n] \cdot \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$-\frac{N}{2} < n < \frac{N}{2} \Longrightarrow \tilde{x}[n] = x[n]$$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1 \to -\infty}^{+N_1 \to +\infty} x[n] \cdot \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$N a_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \exp\left(-jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \exp(-j\Omega n)}$$

یعنی ضرایب $N.a_k$

D.T.F.T of $x[n]$

$$a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)\Big|_{\Omega = \frac{2\pi}{N}k = \Omega_0 k}$$

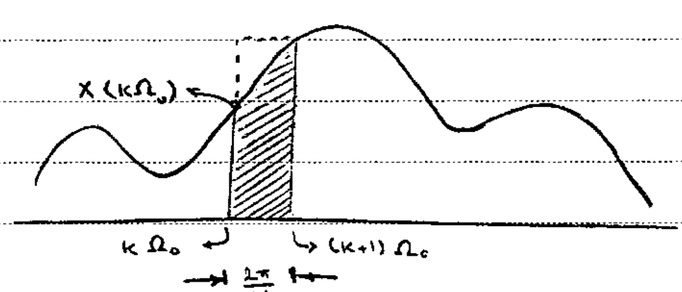
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(\Omega_0 k) \cdot \exp\left(jk\frac{2\pi}{N}n\right)$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \longrightarrow \frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N\rangle} X(\Omega_0 k) \cdot \exp(jk\Omega_0 n) \cdot \Omega_0$$

$$\lim_{N\to\infty} \tilde{x}[n] = x[n] \quad , \quad \lim_{N\to\infty} \Omega_0 = \lim_{N\to\infty} \frac{2\pi}{N} = 0$$

$$X(\Omega) \cdot \exp(j\Omega n)\Big|_{\Omega = \Omega_0 k}$$



Subject:

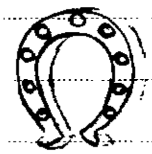
Year. Month. Date. ( )

$$\lim_{N \to +\infty} \tilde{x}[n] = \boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \, d\Omega}$$ تبدیل فوریه معکوس

$X(\Omega) \longrightarrow$ Periodic

$\longrightarrow$ Continuous

$\longrightarrow$ Period $= 2\pi$



*

$x[n] = a^n \cdot u[n]$

$|a| < 1$

$a > 0 \longrightarrow$ [illegible] $\longrightarrow$ smooth

$a < 0 \longrightarrow$ $\longrightarrow$ radic

$a>0$ (smooth) به آرامی تغییر می کند

$a<0$ (radic) با تغییرات زیاد همراه است

$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega)$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cdot e^{-jn\Omega} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\Omega})^n$$

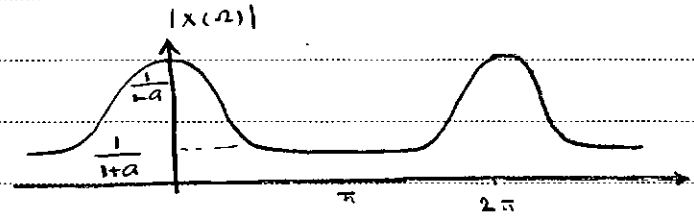
$$X(\Omega) = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}} = \dots = \frac{1 - a\cos(\Omega) - ja\sin(\Omega)}{1 - 2a\cos(\Omega) + a^2}$$

$$X(\Omega) = \underbrace{\frac{1 - a\cos\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}}_{\text{Re}\{X(\Omega)\}} - j \underbrace{\frac{a\sin\Omega}{1 - 2a\cos\Omega + a^2}}_{\text{Im}\{X(\Omega)\}}$$

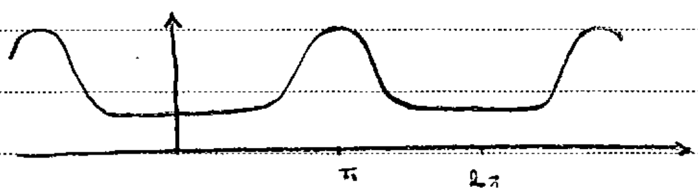
$$|X(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-a\cos(\Omega))^2 + (a\sin(\Omega))^2}}$$

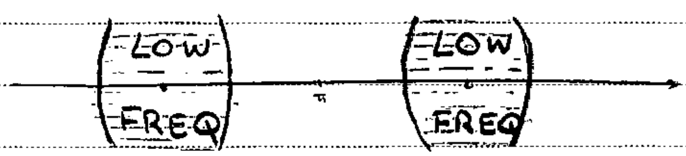
$$\Omega = 0 \longrightarrow |X(\Omega)| = \frac{1}{1-a}$$

$a > 0$



$a < 0$

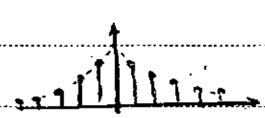




$$x[n] = a^n u[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(\Omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} = \frac{1-a\cos\Omega + j(a\sin\Omega)}{(1-a\cos\Omega)^2 + a^2\sin^2(\Omega)}$$

$$x[n] = a^{|n|} \qquad |a|<1$$

$$x[n] = \begin{cases} a^n & , n \geq 0 \\ a^{-n} & , n < 0 \end{cases}$$

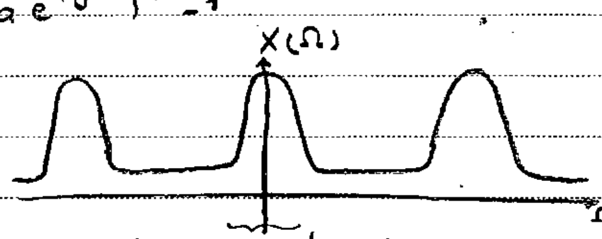


$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-jn\Omega} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-jn\Omega}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{-j\Omega})^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (a e^{+j\Omega})^n - 1$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\Omega}} - 1$$

$$= \frac{1-a^2}{1-2a\cos(\Omega)+a^2}$$



مولفه‌های فرکانس پایین موثرتر است.

* خواص تبدیل فوریه زمان گسسته (DTFT)

I) Periodicity

$X(\Omega) \sim$ periodic (2π)

II) Linearity

$x_1[n] \longleftrightarrow X_1(\Omega)$

$x_2[n] \longleftrightarrow X_2(\Omega)$

$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \longleftrightarrow a_1 X_1(\Omega) + a_2 X_2(\Omega)$

III) Symmetry

$x[n] \sim$ Real signal

$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$

$X^*(\Omega) = X(-\Omega)$

IV)

$X(\Omega) = Re\{X(\Omega)\} + j\, Im\{X(\Omega)\}$

$X^*(\Omega) = Re\{X(\Omega)\} - j\, Im\{X(\Omega)\}$

$X(-\Omega) = Re\{X(-\Omega)\} + j\, Im\{X(-\Omega)\}$

$$\begin{cases} Re\{X(\Omega)\} = Re\{X(-\Omega)\} \longrightarrow Re\{X(\Omega)\} \sim \text{Even} \\ Im\{X(\Omega)\} = -Im\{X(-\Omega)\} \longrightarrow Im\{X(\Omega)\} \sim \text{Odd} \end{cases}$$

☑ حل مثال $x[n] = a^n u[n]$

$Re\{X(\Omega)\} \sim$ even $\quad Im\{X(\Omega)\} \sim$ odd

V >

$$X(\Omega) = |X(\Omega)| \cdot \exp\{\measuredangle X(\Omega)\}$$

$|X(\Omega)| \sim$ Even

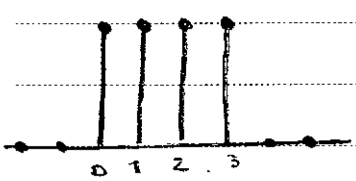
$\measuredangle X(\Omega) \sim$ odd

برای مثال $x[n]=a^n \cdot u[n]$ ☑

$$|X(\Omega)| = \frac{1}{(1+a^2-2a\cos(\Omega))^{1/2}} \sim \text{even}$$

$$\measuredangle X(\Omega) = \text{Arctan}\left(\frac{-a\sin\Omega}{1-a\cos\Omega}\right) \sim \text{odd}$$

☑



$$\text{DTFT}\{x[n]\} = \sum_{n}{}_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \exp(-jn\Omega)$$

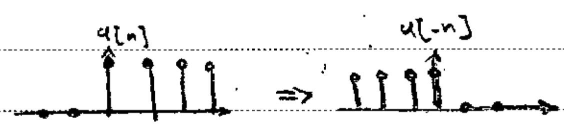
$$= \sum_{n}{}_{0}^{3} (\exp(-j\Omega))^n$$

$$= \frac{1-e^{j4\Omega}}{1-e^{-jn}}$$

$$= \frac{e^{-j2n}(e^{j2\Omega}-e^{-j2\Omega}) \times 2j}{e^{j\frac{\Omega}{2}}(e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}) \times 2j}$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\Omega} \times \frac{\sin(2\Omega)}{\sin(\Omega/2)}$$

$x[n] = 2^n \cdot u[-n]$ ☑



$$X(\Omega) = \sum_{n}{}_{-\infty}^{0} 2^n \cdot \exp(-jn\Omega)$$

$$= \sum_{n}{}_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} e^{j\Omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$$

$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot u[n+2]$ ☑

$X(\Omega) = \sum_{-2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n e^{-j\Omega n} \xrightarrow{m=n+2} X(\Omega) = \frac{16\, e^{j\Omega}}{1 - \frac{1}{4} e^{-j\Omega}}$

VI > Time & Frequency Shifting

$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$

$x[n-n_0] \longleftrightarrow \exp(-jn_0\Omega)\ X(\Omega)$ Time Domain

$\exp(jn\Omega_0) \cdot x[n] \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$ Freq Domain

$x[n] \cdot \cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\{X(\Omega+\Omega_0) + X(\Omega-\Omega_0)\}$ ☑

VII > Time Scaling

(اندکی متفاوت با C.T.)

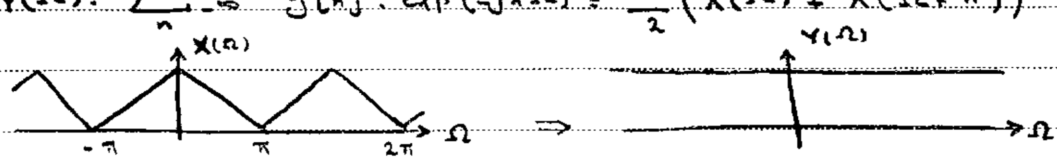
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & , k \mid n \\ 0 & , k \nmid n \end{cases} \longleftrightarrow X_{(k)}(k\Omega)$$

sampling ☑

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & n \sim \text{even} \\ 0 & n \sim \text{odd} \end{cases} \longrightarrow \text{sampler formula}$$

$$y[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + (-1)^n x[n]\right) = \frac{1}{2}\left(x[n] + e^{jn\pi} x[n]\right)$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \cdot \exp(-jn\Omega) = \frac{1}{2}\left(X(\Omega) + X(\Omega+\pi)\right)$$



compressing ☑

$y_c[n] = x[2n] \longleftrightarrow Y_c(\Omega) = X(\frac{\Omega}{2})$

expander ☑

$$y_e[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{2}] & , n \sim \text{even} \\ 0 & , n \sim \text{odd} \end{cases} \longleftrightarrow Y_e(\Omega) = X(2\Omega)$$

VIII > Differentiation In Freq. Domain

$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$

$n.x[n] \longleftrightarrow j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

اثبات: $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n].e^{-jn\Omega}$

$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = -j\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n].(n.e^{-jn\Omega}) \longrightarrow \ldots$

$x[n] = n.(\frac{1}{2})^{|n|}$ ☑

$(\frac{1}{2})^{|n|} \longleftrightarrow \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\cos\Omega+\frac{1}{4}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \ldots$

$x[n] = a^n.u[n] \quad , |a|<1$ ☑

$x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$

$(n+1).x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$

$\frac{(n+r-1)!}{n!.(r-1)!} a^n.u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r}$

IX > Parseval's Relation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} |X(\Omega)|^2 \cdot d\Omega$$

اثبات:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\cdot x^*[n] = \sum x[n]\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X^*(\Omega)\cdot e^{-jn\Omega}\cdot d\Omega\right) =$$

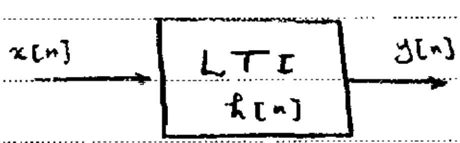
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X^*(\Omega)\,\underbrace{\left(\sum x[n]\cdot e^{-jn\Omega}\right)}_{X(\Omega)}\cdot d\Omega = \ldots$$

X > Convolution

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega)$$

$$h[n] \longleftrightarrow H(\Omega)$$

$$x[n] * h[n] \longleftrightarrow X(\Omega)\cdot H(\Omega)$$



$$x[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot u[n]$$

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n]$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] \longleftrightarrow H(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega)\,H(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \left.\frac{1}{(1-\frac{3}{4}s)(1-\frac{1}{2}s)}\right|_{s=e^{-j\Omega}}$$

$$Y(s) = \frac{A}{(1-\frac{3}{4}s)} + \frac{B}{(1-\frac{1}{2}s)}$$

$$A = (1-\tfrac{3}{4}s)\,Y_s\Big|_{s=\frac{4}{3}} = 3 \qquad B = (1-\tfrac{1}{2})\,Y_s\Big|_{s=2} = -2$$

$$y[n] = 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$x[n] = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$

$H(\Omega) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$ $\qquad X(\Omega) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2}$

$$Y(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2} = \frac{A}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})} + \frac{C}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}$$

$$y[n] = A(n+1)\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + B\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u[n] + C\left(\tfrac{1}{2}\right)^n u[n]$$

XI > Sinosidal Signals

$$x[n]\cdot\cos(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(X(\Omega+\Omega_0) + X(\Omega-\Omega_0)\right)$$

$$x[n]\cdot\sin(\Omega_0 n) \longleftrightarrow \frac{j}{2}\left(X(\Omega+\Omega_0) - X(\Omega-\Omega_0)\right)$$

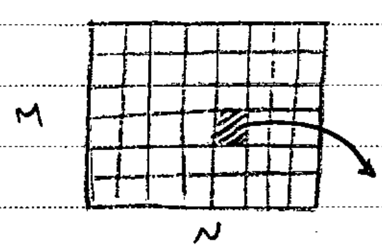
$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) u[n]$

$$X(\Omega) = \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega+\frac{\pi}{2})}} + \frac{1/2}{1-\frac{1}{2}e^{-j(\Omega-\pi/2)}}$$

3: کانولوشن دوبعدی

1-D: $\quad y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]\cdot h[n-m]$

2-D: $\quad y[m,n] = x[m,n] * h[m,n]$

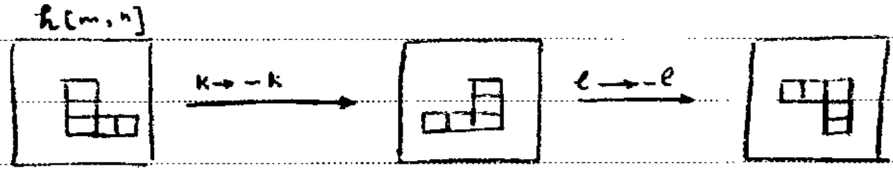


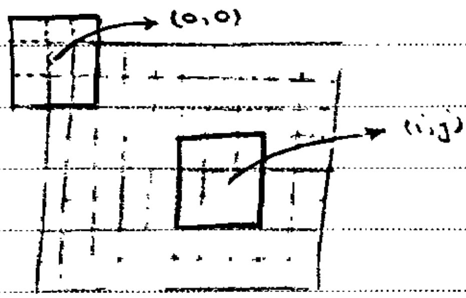
Black : 0
White : 255
Gray Scale

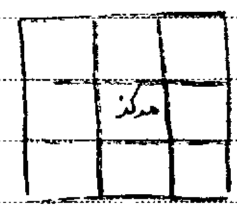
Pixel : 8 bit $(0-255) \longrightarrow (i,j)$th element

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$y[m,n] = \sum_{\ell}\sum_{k} x[k,\ell]\cdot h[m-k,n-\ell]$$







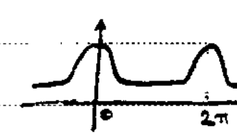
فیلتر $h[m,n]$

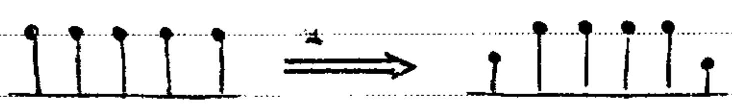
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \longrightarrow$$ low pass filtering (میانگین‌گیری) ⟶ هر نقطه را با یک ۸ نقطه مجاور اصلاح می‌کند.

⇢ coefficient of filter

$$DTFT\{h[n]\} = H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\cdot e^{-jn\Omega}$$

$$h[n] = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \longrightarrow H(\Omega) = \tfrac{1}{3}e^{j\Omega} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}e^{-j\Omega} = \tfrac{1}{3}\cos\Omega + \tfrac{1}{3}$$

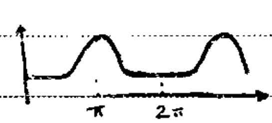


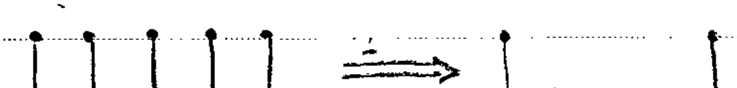


لبه‌ها را محو می‌کند.
لبه ← فرکانس بالا

فیلترهای بالاگذر: لبه را حفظ می‌کند، جزئیات را نمایش می‌دهد

$$h[n] = \left[-\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}\right]$$





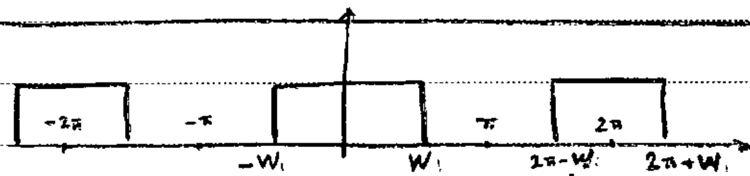
PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. 54

* DTFT مطرح فیلتر پایین گذر

$$DTFT\{x[n]\} = X(\Omega) = \underbrace{X(e^{j\Omega})}_{\text{another notation}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

$$\boxed{IDTFT\{X(\Omega)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega}$$



Ideal Low Pass Filter

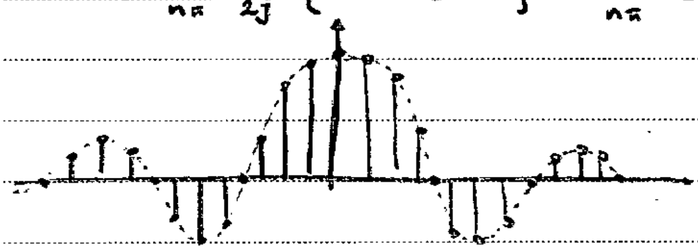
ایده‌آل است، چون نقطه cut off freq (W) خیلی تیز است

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} H(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} \cdot d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} (1) \cdot e^{jn\Omega}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jn} e^{jn\Omega}\Big|_{-W}^{W}$$

Time Domain

$$= \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{2j}\{e^{jnW} - e^{-jnW}\} = \frac{1}{n\pi}\sin(nW) = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$$



* DTFT برای سیگنال‌های متناوب

C.T. : $\tilde{x}(t)$ - periodic (T_0) $\longrightarrow$ $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\tilde{X}(\omega) = \sum_k 2\pi \cdot a_k \cdot \delta(\omega - k\omega_0)$$

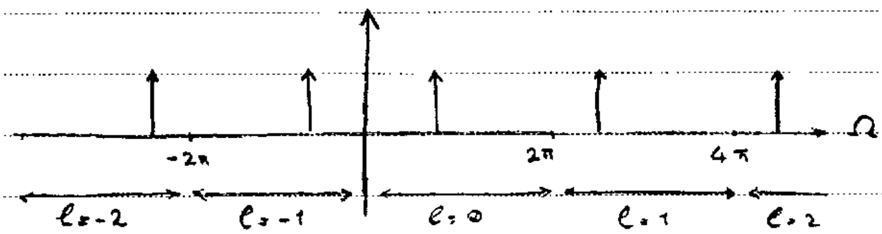
$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

D.T. : $e^{j\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0)$

و کلاً برای پریودیک : $X(\Omega) = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)$

اثبات :



$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle}\Big[\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\Big]\cdot e^{jn\Omega}\,d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{(r)2\pi}^{(r+1)2\pi} 2\pi\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\cdot e^{jn\Omega}\cdot d\Omega$$ ضرب

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)\cdot e^{jn(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell)}\cdot d\Omega$$

$$= e^{jn(\Omega_0+2\pi\ell)}\cdot\int\delta(-)\cdot d\Omega = e^{jn\Omega_0}\cdot e^{jn2\pi\ell} = e^{jn\Omega_0} \checkmark$$

حال داریم :

$$\sum_{k=0}^{N-1} a_k\, e^{jk\Omega_0 n} \xleftrightarrow{DTFT} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_0\,\delta(\Omega-0-2\pi\ell) \quad (k=0)$$

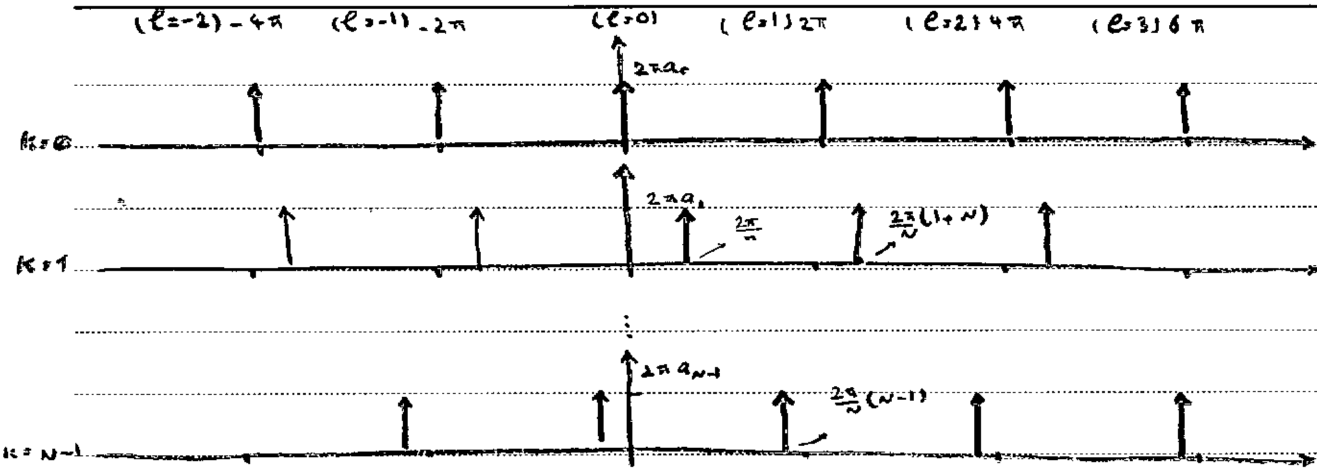
$$+\sum 2\pi a_1\,\delta(\Omega-\Omega_0-2\pi\ell) \quad (k=1)$$

$$+\ \cdots$$

$$+\sum 2\pi a_{N-1}\,\delta(\Omega-(N-1)\Omega_0-2\pi\ell) \quad (k=N-1)$$

Fourier Series: $\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$

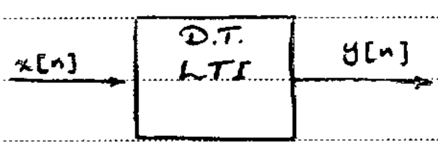
if: $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Longrightarrow DTFT\{\tilde{x}[n]\} = \tilde{X}[n] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\,\delta(\Omega-k\Omega_0-2\pi\ell)$



$$\boxed{\tilde{X}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)}$$

$x[n] \sim$ periodic (N)

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\, a_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

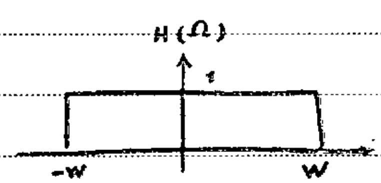


یک مثال دیگر //

Impulse Response : $h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n}$

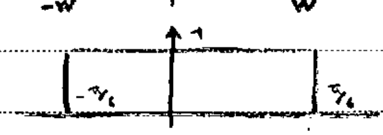
$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$\frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \xleftrightarrow{\text{DTFT}}$



Ideal Low Pass Filter (ILP)

$h[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}n\right)}{\pi n} \longleftrightarrow$



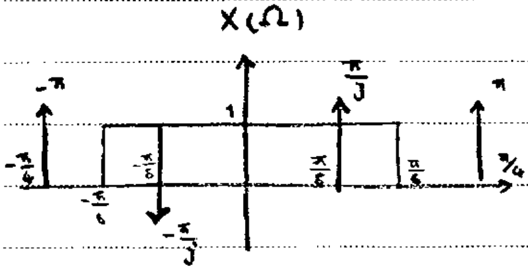
$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \longrightarrow x_1[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) \longrightarrow N=16\ ,\ a_1 = \frac{1}{2j}\ ,\ a_{-1} = \frac{-1}{2j}$

$\qquad\qquad\qquad\quad \hookrightarrow x_2[n] = -2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \longrightarrow N=8\ ,\ \ldots$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$X_1(\Omega) = 2\pi\left(\frac{1}{2j}\right)\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{16}(1)\right) + 2\pi\left(\frac{-1}{2j}\right)\delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{16}(-1)\right)$$

$$= \frac{\pi}{j}\delta\left(\Omega - \frac{\pi}{8}\right) + \left(-\frac{\pi}{j}\right)\delta\left(\Omega + \frac{\pi}{8}\right)$$



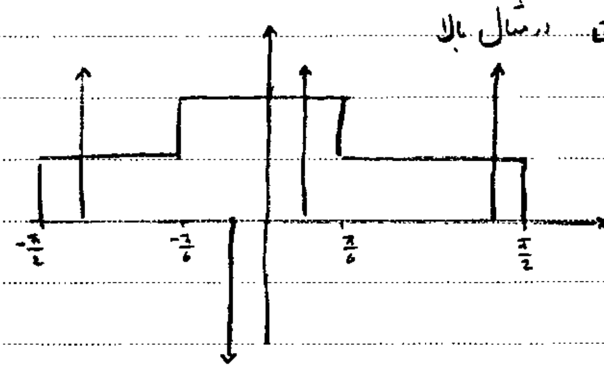
$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega)$$

تنها مولفه‌ی سینوسی در بازه سیستم در جواب باقی می‌ماند.

$$y[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

در مثال بالا

$$h[n] = \frac{\left(\sin\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n} + \frac{\left(\sin\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$



با توجه به اینکه gain در ناحیه ورودی سینوسی 2 است پس دامنه آن دوبرابر می‌شود.

$$y[n] = \underline{\underline{2}}\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

در مثال بالا

$$h[n] = \frac{\left(\sin\frac{\pi n}{6}\right)}{\pi n} \times \frac{\left(\sin\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

خاصیت مدولاسیون

$$x_1[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_1(\Omega)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} X_2(\Omega)$$

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{2\pi}\left[X_1(\Omega) \circledast X_2(\Omega)\right]$$

periodic convolution

$$DTFT\{x_1[n] \cdot x_2[n]\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X_1(\theta) \cdot X_2(\Omega - \theta)\, d\theta$$

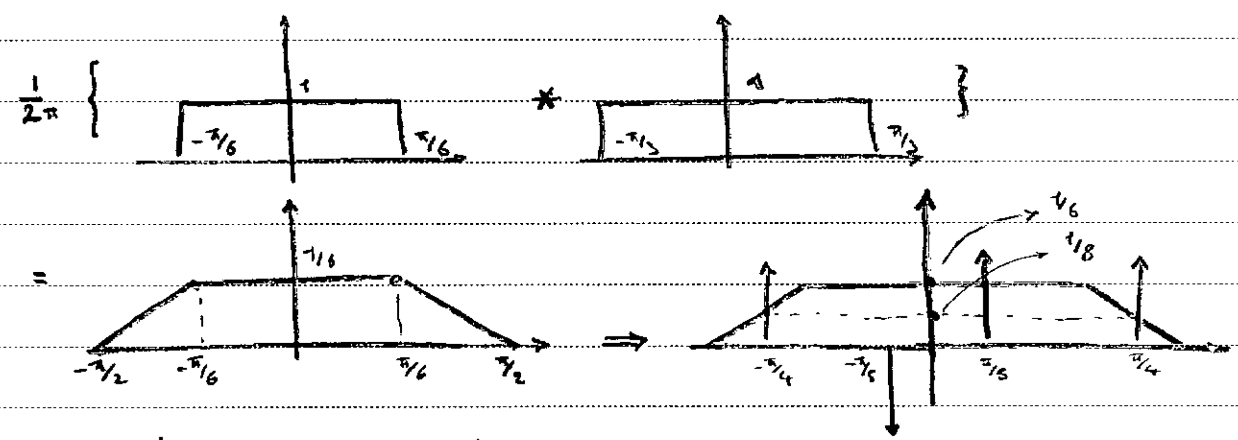
اثبات: $Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n].e^{-jn\Omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (x_1[n].x_2[n]).e^{-jn\Omega}$

تبدیل فوریه معکوس $x_1[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X_1(\theta).e^{jn\theta}.d\theta$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int X_1(\theta).e^{j\theta n}.d\theta\right].x_2[n].e^{-jn\Omega}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\Omega).\frac{1}{2\pi}\sum x_2[n]\,e^{j\theta n}.e^{-j\Omega n}.d\Omega$$

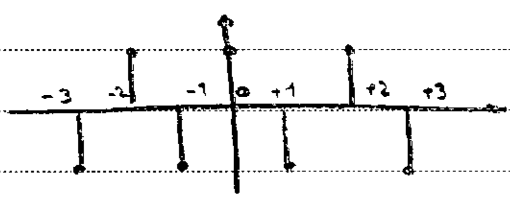
ادامه حل مثال:



$y[n] = \frac{1}{6}\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right) - \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

$x[n] = (-1)^n$

$N = 2$



$DTFT\{x[n]\} = X(\Omega)$

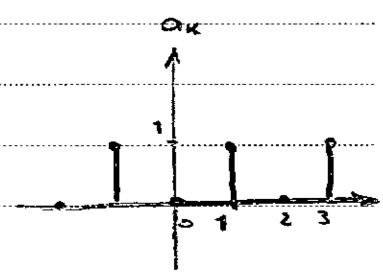
I. پریودیک : $X(\Omega) = \sum 2\pi a_k\,\delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{<N>} x[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

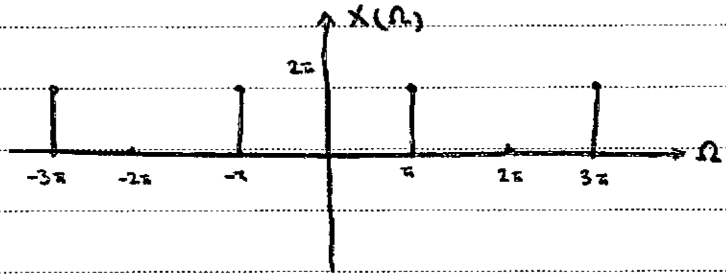
$$= \frac{1}{2}\left[(1).e^{-j(0)} + (-1).e^{-jk\frac{2\pi}{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - (-1)^k\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & , k - Even \\ 1 & , k - Odd \end{cases}$$



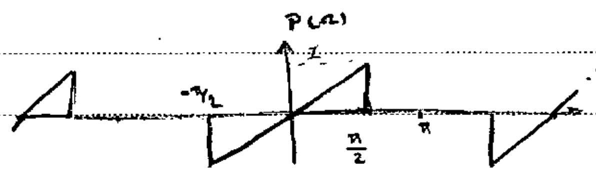
$$X(\Omega) = \underbrace{2\pi(1)\,\delta(\Omega-\pi)}_{k=1} + \underbrace{0}_{k=2} + \underbrace{2\pi(+1)\,\delta(\Omega+\pi)}_{k=-1}$$ [illegible]



$g[n] = x[n] \cdot p[n]$

$x[n] = (-1)^n$

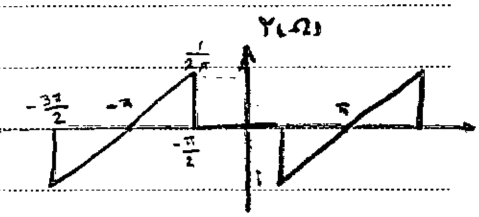
$\text{DTFT}\{p[n]\} =$



$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left(P(\Omega) * X(\Omega)\right)$

می‌دانیم: $P(\Omega) * \delta(\Omega) = P(\Omega)$

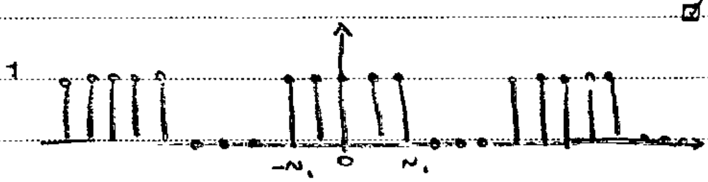
$Y(\Omega) = \frac{1}{2\pi} P(\Omega) * \delta(\Omega-\pi) = \frac{P(\Omega-\pi)}{2\pi}$



$h[n] = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)}{\pi n}$

$x[n]$

$N = 8,$



$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k\, \delta\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\dfrac{\sin\left[2\pi k\left(N_1+\frac{1}{2}\right)/N\right]}{\sin\left(\frac{2\pi k}{2N}\right)}, & k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\[2ex] \dfrac{2N_1+N}{N}, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \end{cases}$$

$N=8 \longrightarrow X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}k)$

$X(\Omega) = 2\pi a_0 \delta(\Omega) +$ (k=0)

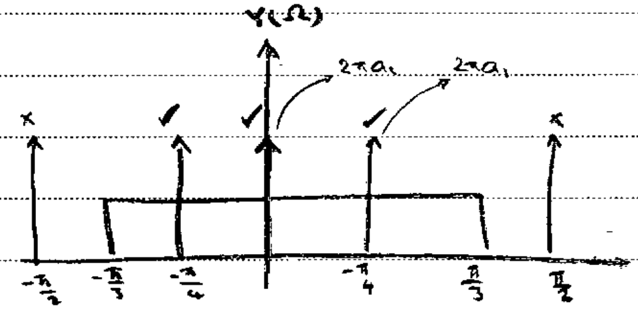
$2\pi a_1 \delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) +$ (k=1)

$2\pi a_{-1} \delta(\Omega + \frac{\pi}{4}) +$ (k=-1)

$2\pi a_2 \delta(\Omega - \frac{\pi}{2}) +$ (k=2)

$2\pi a_{-2} \delta(\Omega + \frac{\pi}{2}) +$ (k=-2)

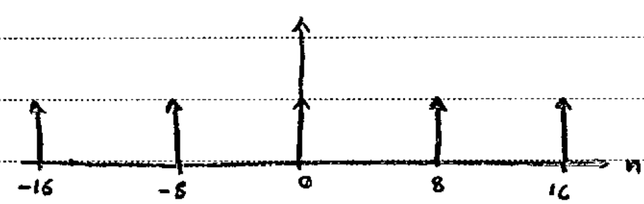
...



$y[n] = \frac{5}{8} + \frac{\sin(5\pi/8)}{4\sin(\pi/8)} \cdot \cos(\frac{\pi n}{4})$

$h[n] = \frac{\sin(\frac{\pi n}{3})}{\pi n}$

$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-8k]$



$x[n]$ – periodic (8)

$a_k = \frac{1}{8}, \forall k$

$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \cdot \delta(\Omega - \frac{2\pi}{N}k)$

$= \frac{2\pi}{8}\delta(\Omega) + \frac{2\pi}{8}\delta(\Omega - \frac{\pi}{4}) + \frac{2\pi}{8}(\Omega + \frac{\pi}{4}) \longrightarrow y[n] = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}\cos(\frac{\pi n}{4})$

Input / Output Relationship in LTI Systems *

$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]$ $\quad x[n] \rightarrow \boxed{LTI} \rightarrow y[n]$

$DTFT\{\quad\} = DTFT\{\quad\}$

با توجه به خواص خطی بودن و جابجایی داریم:

$$Y(\Omega) \sum_{K=0}^{N} a_K . e^{-jK\Omega} = X(\Omega) \sum_{K=0}^{M} b_K . e^{-jK\Omega}$$

خاصیت کانولوشن

$$Y(\Omega) = X(\Omega) . H(\Omega)$$

$$H(\Omega) = \text{Frequency Response} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

$$H(\Omega) = \frac{\sum_0^M b_K . e^{-jK\Omega}}{\sum_0^N a_K . e^{-jK\Omega}}$$

چندجمله‌ای برحسب $e^{-jK\Omega}$

به همین دلیل گاهی به جای $H(\Omega)$ ، $H(e^{-j\Omega})$ می‌نویسند

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 2\, x[n]$$

$$H(\Omega) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4} e^{-j\Omega} + \frac{1}{8} e^{-2j\Omega}} = \frac{2}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$= \frac{A}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \rightarrow A = 4,\ B = 2$$

$$h[n] = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$h[n]$ — مثال

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n . u[n]$$

$$X(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) . H(\Omega) = \frac{2}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})^2 (1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})} = \frac{A}{(\sim)^2} + \frac{B}{(\sim)} + \frac{C}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})}$$

$$y[n] = A(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + B\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + C\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Subject:
Year. Month. Date. 58

$$y[n] - \frac{1}{9} y[n-2] = x[n]$$

$$x_1[n] = \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = (n+1) \left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$H(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{9}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})(1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega})} = \frac{A}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$h[n] = A\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + B\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$X_1(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$Y_1(\Omega) = X_1(\Omega) \cdot H(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})^2(1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega})} = \frac{A}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})^2} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} + \frac{C}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$A = \frac{1}{2},\ B = \frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4} \longrightarrow y_1[n] = \frac{1}{2}(n+1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}\left(\tfrac{-1}{3}\right)^n u[n]$$

$$X_2(\Omega) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}e^{-j\Omega})^2} \qquad \frac{(n+r-1)!}{n!\,(r-1)!} a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^r} \text{ :(طریق)}$$

$$y_2[n] = \frac{1}{8}\left(-\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{9}{16}\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] - \frac{3}{16}(n+1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n] + \frac{1}{4}(n+2)(n+1)\left(\tfrac{1}{3}\right)^n u[n]$$

*

$$H(\Omega) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^{M}(1-\mu_k e^{-j\Omega})}{a_0 \prod_{k=1}^{N}(1-\eta_k e^{-j\Omega})}$$

ریشه‌های صورت و مخرج مجاز، حقیقی و یا مختلط است
اگر ریشه مختلط داشته باشد به صورت زوج است.

$$(1-\mu_i e^{-j\Omega})(1-\mu_i^* e^{-j\Omega}) = 1 - \mu_i^* e^{-j\Omega} - \mu_i e^{-j\Omega} + \mu_i \mu_i^* e^{-j2\Omega} =$$

$$1 - 2\,\mathrm{Re}\{\mu_i\} + (|\mu_i|^2)\,e^{-j2\Omega}$$

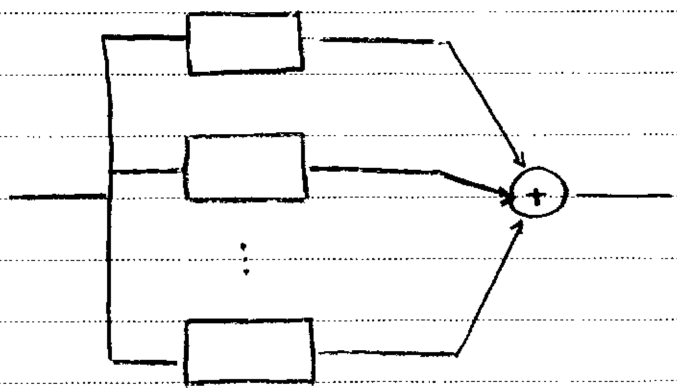
با توجه به این ترتیب

$$H(\Omega) = H_1(\Omega) \cdot H_2(\Omega) \cdots H_N(\Omega)$$

$$\longrightarrow \boxed{H_1(\Omega)} \longrightarrow \boxed{H_2(\Omega)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boxed{H_N(\Omega)} \longrightarrow$$

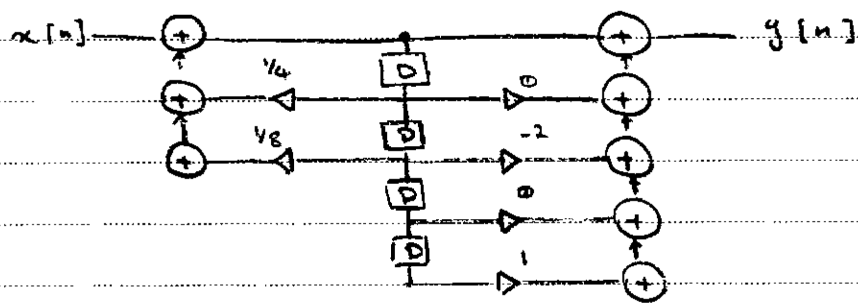
$$H(\Omega) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A_k}{1-\alpha_k e^{-j\Omega}}$$

۱۱/۱۰/- بسط کسرهای جزئی



$$y[n] - \frac{1}{4} y[n-1] - \frac{1}{8} y[n-2] = x[n] - 2x[n-2] + x[n-4]$$

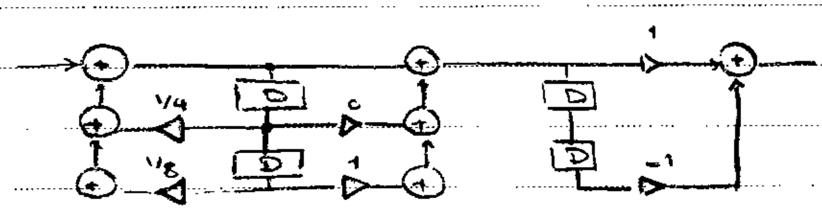
ساختار سیستم II



$$H(\Omega) = \frac{1-2e^{-j2\Omega}+e^{-j4\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{(1-e^{-j2\Omega})(1-e^{-j2\Omega})}{\sim}$$

$$= \frac{1-e^{-j2\Omega}}{\sim} \cdot (1-e^{j2\Omega})$$

اتصال سری ساختارهای درجه 2



اتصال موازی ساختارها ⟵ جمع چند $H(\Omega)$ بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} y[n] + \frac{1}{4} y[n-1] + W[n] + \frac{1}{2} W[n-1] = \frac{2}{3} x[n] \\ y[n] - \frac{5}{4} y[n-1] + 2W[n] - 2W[n-1] = -\frac{5}{3} x[n] \end{cases}$$ ☑

$$(1+\frac{1}{4}e^{-j\Omega})\,Y(\Omega) + (1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega})\,W(\Omega) = \frac{2}{3}X(\Omega) \longrightarrow W(\Omega) = ?$$

// به کمک معادله دوم رابطه ورودی - خروجی را می‌یابیم ......

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{3-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$y[n] - \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = 3x[n] - \frac{1}{2} x[n-1]$$

$$H(\Omega) = \frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})} \longrightarrow h[n] = A(\tfrac{1}{2})^n u[n] + B(\tfrac{1}{4})^n u[n]$$

* Duality

C.T.

$$\boxed{\begin{aligned} f(t) &\longleftrightarrow F(\omega) \\ F(t) &\longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned}}$$

D.T.F.T.

$$\mathrm{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,.\,e^{-jn\Omega}$$

پیوسته، متناوب (2π)

$$\mathrm{IDTFT}\{X[n]\} = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi\rangle} X(\Omega)\,.\,e^{jn\Omega}\,.\,d\Omega$$

پیوسته   گسسته

خاصیت دوگانی وجود ندارد.

$\tilde{x}[n]$ is periodic (N)

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k\,.\,e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad , \quad a_k \sim \text{periodic } (N)$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{F.S} a_k \equiv F[k]$: periodic (N)

$F[n] \xleftrightarrow{F.S} \frac{1}{N} \tilde{x}[-k]$

$DTFT\{x[n]\} = X(\Omega)$ ~ پیوسته , Periodic (2π)

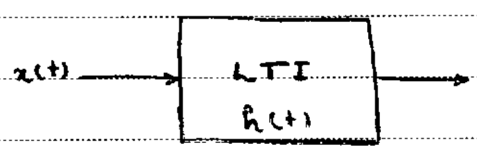
بحث سری فوریه برای سیگنالهای زمان پیوسته

$x(t) \longleftrightarrow C_k$, $x[t] = \sum_{k}^{+\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$

$X(\Omega)\Big|_{\Omega=t} \longleftrightarrow x[-k]$

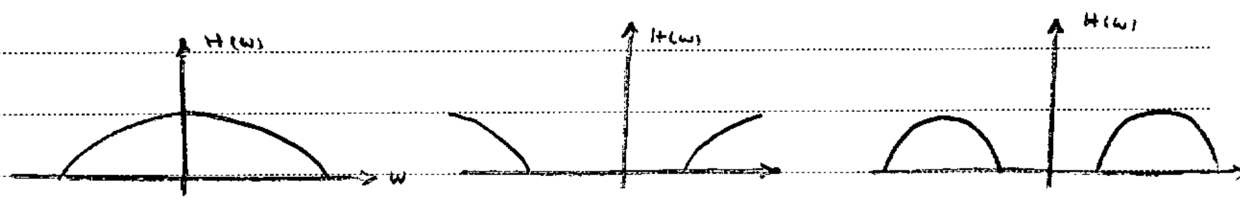
* فیلتر ٤

C.T.



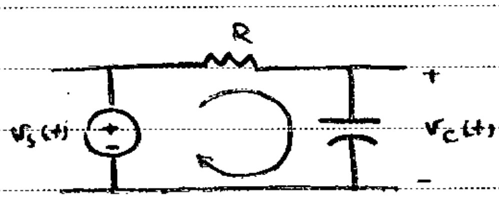
$y(t) = x(t) * h(t)$

$Y(t) = H(\omega) \cdot H(\omega)$



Low Pass   High Pass   Pass Band

LPF ☑



$x(t) = V_s(t)$

$y(t) = V_c(t)$

KVL: $V_r(t) + V_c(t) = V_s(t)$

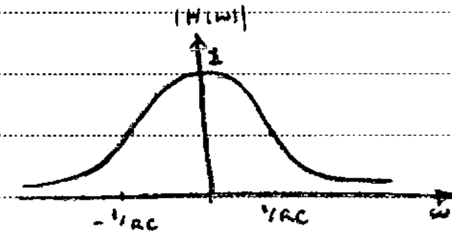
$i_c = C \frac{dV_c(t)}{dt}$

$RC \frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t) = V_s(t)$

$$RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)\longrightarrow\frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

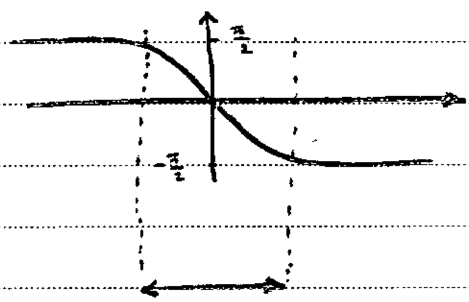
$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC}+j\omega}\longrightarrow h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$

$$|H(\omega)|=\frac{\frac{1}{RC}}{\sqrt{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}}\longrightarrow$$



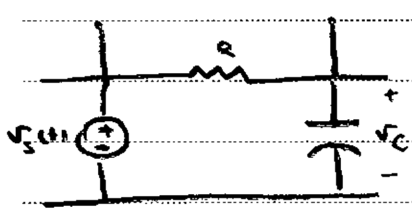
→ دامنه فرکانس‌های پایین برجسته‌تر است.

$\measuredangle H(\omega)=$



→ در ناحیه مشخص شده
رفتار فیلتر خطی است
اما [illegible]
[illegible] است.

HPF ☑



$x(t)=v_s(t)$

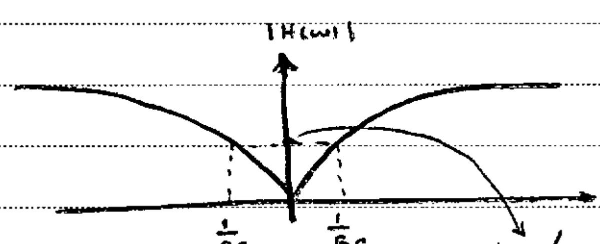
$y(t)=v_r(t)$

$v_r+v_c=v_s\longrightarrow v_c=v_s-v_r$

$i_c=C\frac{dv_c}{dt}\longrightarrow i_c=C\frac{d(v_s-v_r)}{dt}$

$$RC\frac{dv_r}{dt}+v_r=RC\frac{dv_s}{dt}\longrightarrow RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=RC\frac{dx(t)}{dt}$$

$$H(\omega)=\frac{RC(j\omega)}{RC(j\omega)+1}=\frac{j\omega}{j\omega+\frac{1}{RC}}$$



$\frac{1}{RC}$ = Bandwidth of filter

$\frac{|H(\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}\equiv$ نقطه‌ای که دامنه به اندازه 3db افت یابد

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\text{DTFT}\{x[n]\} = X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-jn\Omega}$$

$$\text{IDTFT}\{X(\Omega)\} = x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X(\Omega) \cdot e^{+jn\Omega} \, d\Omega$$

تبدیل لاپلاس:

C.T.:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-st} \, dt$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \, dt$$

$s = j\omega \iff$ تبدیل لاپلاس یک تبدیل عمومی‌تر (generalization) تبدیل فوریه است

تبدیل Z :

* Bilateral

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

Two-sided Z-transform $\longrightarrow$ $-\infty < z < +\infty$

* Unilateral

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$$

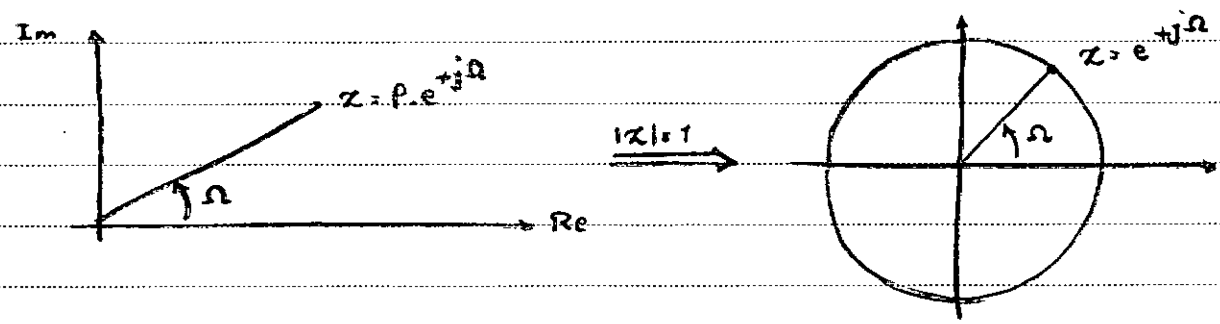
One-sided Z-transform $\longrightarrow$ $0 \leqslant z < +\infty$

*

$$z \in \mathbb{C} \implies z = \rho \cdot e^{+j\Omega}$$

مقایسه با تبدیل فوریه

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \text{IDFT}\{x[n]\} \iff |\rho| = 1 \text{ یا } |z| = 1$$



تبدیل Z و تبدیل فوریه نمای گسسته بر روی دایره شعاع واحد مشترک هستند.
متناوب با دوره 2π

$$X(z)\Big|_{z=\rho e^{j\Omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot (\rho e^{j\Omega})^{-n} \quad *$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\underbrace{x[n]\,\rho^{-n}}) \cdot e^{-jn\Omega}$$

دلیل متمایز شدن تبدیل Z ، وجه تمایز با سری فوریه

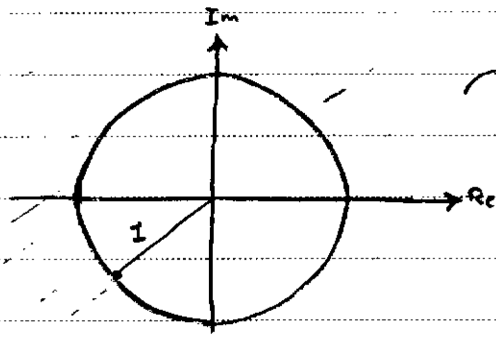
Subject:

Year. Month. Date. ( )

* مثال: تبدیل Z

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1)\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

شرط همگرایی: $|z^{-1}| < 1 \longrightarrow \frac{1}{|z|} < 1 \longrightarrow |z| > 1$



ناحیه همگرایی (region of convergence, ROC)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^n = \frac{1-(z^{-1})^{\infty}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

z - plane

*

$$X(z^{-1}) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad ROC: |z| > 1$$

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad ROC: |z| > 1$$

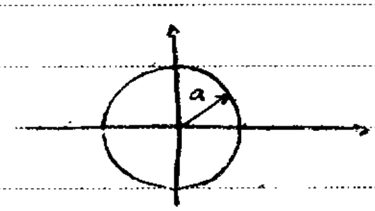
$x[n] = a^n \cdot u[n]$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$$

شرط همگرایی: $|a z^{-1}| < 1$

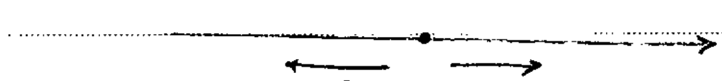
$$\frac{|a|}{|z|} < 1$$

$$|z| > |a|$$



$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad ROC: |z| > |a|$$

دنباله سمت راستی است ← ناحیه همگرایی خارج از دایره.



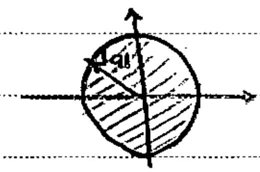
* ناحیه همگرایی دنباله‌هایی که سمت راستی (Right-Sided Seq.) هستند خارج از یک دایره به سمت بی‌نهایت است.

$x[n] = -a^n . u[-n-1]$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] . z^{-n}$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n + 1$

ROC: $|a^{-1}z| < 1 \longrightarrow \frac{|z|}{|a|} < 1 \longrightarrow |z| < |a|$



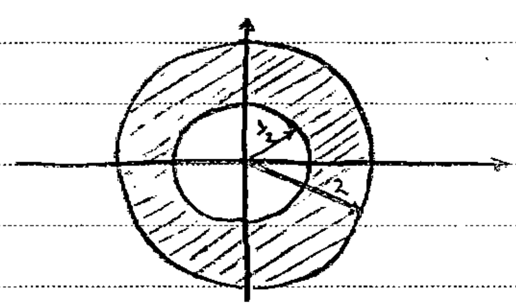
$X(z) = -\frac{1}{1-a^{-1}z} + 1 = \frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z} = \frac{-z}{a-z} = \frac{z}{z-a}$ دنباله سمت چپی

* با توجه به دو مثال قبل می‌بینیم که تبدیل Z دو سیگنال برابر است، تنها در ROC تفاوت دارد بین، توجه به ROC بسیار اساسی است.

* ناحیه همگرایی دنباله‌هایی که سمت چپی (Left-Side Seq.) هستند داخل یک دایره به سمت مبدأ است.

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]}_{\frac{z}{z-\frac{1}{2}}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n-1]}_{-\left(\frac{z}{z-2}\right)}$



ROC: $|z| > |\frac{1}{2}|$ ROC: $|z| < 2$ ROC: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

Subject:
Year.   Month.   Date.   ( )

* ناحیه همگرایی برای رشته‌ی دو طرفه، به صورت یک حلقه است

* به طور کلی:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{N(z)}{D(z)}$$ چند جمله‌ای برحسب z یا z^{-1}

$N(z_0) = 0 \longrightarrow$ ریشه‌ی صورت $\longrightarrow$ zeros

$D(z_0) = 0 \longrightarrow$ ریشه‌ی مخرج $\longrightarrow$ poles

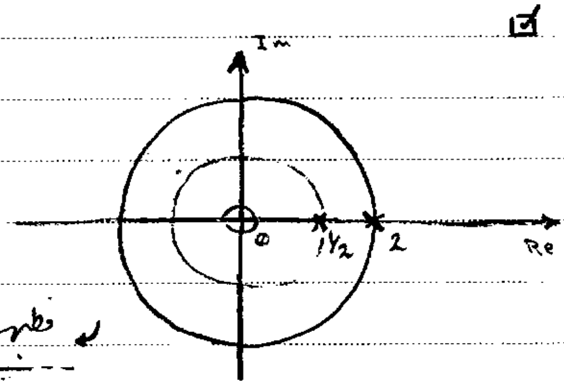
☑

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \frac{-\frac{3}{2} z}{(z-\frac{1}{2})(z-2)}$$

قطبها : $z = \frac{1}{2}$ ، $z = 2$

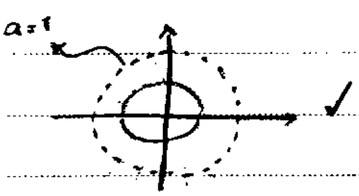
صفر : $z = 0$

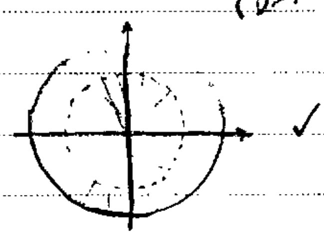


قطبها در ناحیه همگرایی قرار ندارند.

* ناحیه همگرایی شامل قطبها نمی‌شود. (یعنی مقدار آن بی‌نهایت نشود)

* ناحیه همگرایی اگر دایره واحد را دربرداشته باشد، آن رشته تبدیل فوریه گسسته دارد.
(محیط دایره را بپوشاند، نه سطح آن را)





☑

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}$$

$X(z) = \sum \delta[n] z^{-n} = 1 \quad \forall z$ ROC: کل صفحه مختلط

Subject:
Year. Month. Date. 63

$x[n] = \delta[n] - \delta[n-n_0]$ ☑

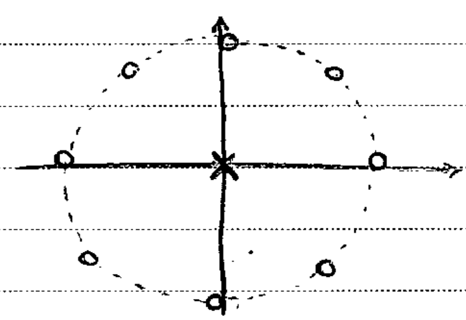
$= (1)z^0 - (1)z^{-n_0} = 1 - z^{-n_0} = \dfrac{z^{n_0}-1}{z^{n_0}} \longrightarrow$ pole : $z=0$

ROC = $\mathrm{Re} \times \mathrm{Im} - \{(0,0)\}$ تمام صفحه مختلط به جز مبدأ

$x[n] = \begin{cases} a^n & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$ ☑

$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \dfrac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}$

$X(z) = \dfrac{1}{z^{N-1}} \cdot \dfrac{z^N - a^N}{z-a}$



قطب : $z=0 \longrightarrow$ قطب $N-1$

صفر : $N-1$ تا $\longrightarrow$ ریشه $z=a$ ، بجز صورت شد

* سیگنال‌های محدود ، دارای تبدیل Z با

* R.S.S (سمت راستی) : ناحیه همگرایی خارج دایره‌ای به شعاع بزرگترین قطب

L.S.S : ناحیه همگرایی داخل دایره‌ای به شعاع کوچکترین قطب

T.S.S : \$ # ^ % !! # @ ?

* خواص تبدیل z!

$x_1[n] \xleftrightarrow{3.T.} X_1(z)$ ROC: R_{x_1}

$x_2[n] \xleftrightarrow{3.T.} X_2(z)$ ROC: R_{x_2}

I> Linearity

$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \xleftrightarrow{3T} a_1 X_1(z) + a_2 X_2(z)$

ROC: $R_{x_1} \cap R_{x_2}$

II> Time Shifting

$x_1[n-n_0] \xleftrightarrow{3T} z^{-n_0} \cdot X_1(z)$

امکان ایجاد، حذف قطب و صفر وجود دارد، وابسته به n_0 است.

ROC: $R_{x_1} \longrightarrow \exists\, n_0$: addition or deletion of $z=0$

III> Multiplication by «n» or «n^2»

$x[n] \xleftrightarrow{3T} X(z)$

$n \cdot x[n] \xleftrightarrow{3.T.} -z \dfrac{d}{dz}\{X(z)\}$ ROC: مانند حالت قبل

$n^2 \cdot x[n] \xleftrightarrow{3.T.} z \dfrac{d}{dz}\{X(z)\} + z^2 \dfrac{d^2}{dz^2}\{X(z)\}$ ROC: مانند حالت قبل

$a^n u[n] \longleftrightarrow z/_{z-a}$ ☑

$n a^n u[n] \longleftrightarrow az/_{(z-a)^2}$

ROC: تغییر ندارد

IV> Multiplication by «$\cos(\Omega_0 n)$» or «$\sin(\Omega_0 n)$».

$\cos(\Omega_0 n) = \frac{1}{2}\{e^{j\Omega_0 n} + e^{-jn\Omega_0}\}$

$\sin(\Omega_0 n) = \frac{-1}{2j}\{e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}\}$

$$x[n]\cdot\cos(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}.T.} \frac{1}{2}\{X(e^{j\Omega_0}z)+X(e^{-j\Omega_0}z)\}$$

$$x[n]\cdot\sin(\Omega_0 n) \xleftrightarrow{\mathcal{Z}.T.} \frac{j}{2}\{X(e^{j\Omega_0}z)-X(e^{-j\Omega_0}z)\}$$

$$\mathcal{Z}\{\cos(\Omega_0 n)\cdot u[n]\}$$

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-1}=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z|>1$$

$$X(z)=\frac{1}{2}\,\frac{\exp(j\Omega_0)z}{\exp(j\Omega_0)z-1}+\frac{1}{2}\,\frac{\exp(-j\Omega_0)z}{\exp(-j\Omega_0)z-1}$$

مثال:

$$X(z)=\frac{1}{2}\sum(e^{j\Omega_0}z^{-1})^n+\frac{1}{2}\sum(e^{-j\Omega_0}z^{-1})^n$$

$$=\frac{1/2}{1-e^{j\Omega_0}z^{-1}}+\frac{1/2}{1-e^{-j\Omega_0}z^{-1}}=\frac{1/2(1-e^{-j\Omega_0}z^{-1})+1/2(1-e^{j\Omega_0}z^{-1})}{(1-e^{j\Omega_0}z^{-1})(1-e^{-j\Omega_0}z^{-1})}$$

$$=\frac{1-\cos(\Omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\Omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$$

$$\text{ROC: } |e^{j\Omega_0}z^{-1}|<1 \Longrightarrow |z|>|e^{j\Omega_0}|$$

V> Convolution

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}T} X(z) \qquad \text{Roc: } R_x$$

$$h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}T} H(z) \qquad \text{Roc: } R_h$$

$$y[n]=x[n]*h[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}.T} Y(z)=X(z)\cdot H(z)$$

$$\text{Roc: } R_x\cap R_h$$

VI> Time Reversal

$$x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}.T.} X(z) \qquad \text{Roc: } R_x$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}.T.} X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{Roc: } \frac{1}{R_x}$$

یعنی $r_R<|z|<r_L : R_x \longrightarrow \frac{1}{r_L}<|z|<\frac{1}{r_R} : \frac{1}{R_x}$

$x[n] = a^n \cdot u[n] \longleftrightarrow \dfrac{1}{1-az^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$ Roc: $|z|>|a|$ ☑

$x[n] = a^{-n} \cdot u[-n] \longleftrightarrow \dfrac{1/z}{1/z - a} = \dfrac{1}{1-za}$ Roc: $|z| < \dfrac{1}{|a|}$

VII > Summation

if $x[n] = 0 \quad n<0$

$v[n] = \sum_{i=0}^{n} x[i]$

$v[n] = \sum_{i=0}^{n-1} x[i] + x[n]$

$v[n] = v[n-1] + x[n]$

$$\mathcal{Z}\{v[n]\} = V(z) = z^{-1} V(z) + X(z) \implies V(z) = \frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

* تبدیل «زد» معکوس

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n} = \dots + x[-1]z^{+1} + x[0] + x[+1]z^{-1} + \dots$$

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

● راه اول:

تقسیم صورت بر مخرج چند جمله ای را به دست می دهد که ضرایب آن جواب است.

$$X(z) = \frac{z^2-1}{z^3+2z+4}$$ ☑

$$z^2 - 1 \quad \Big| \quad \frac{z^3+2z+4}{z^{-1} + 0z^{-2} - 3z^{-3} - 4z^{-4} - \dots}$$

$x[1] = 1$

$x[2] = 0$

$x[3] = -3$

$\vdots$

$\implies \forall n \leq 0 : x[n] = 0 \implies$ R.S.S

• روش دوم : By Inspection

با دیدن یک تبدیل آشنا و توجه کامل به ROC طرف اول را بنویسیم

$$\frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

ROC: $|z| > |a| \implies a^n u[n]$

ROC: $|z| < |a| \implies -a^n u[-n-1]$

• روش سوم : بسط کسرهای جزئی

$$X(z) = \frac{N(z)}{M(z)} = \frac{\sum_0^M b_k \cdot z^{-k}}{\sum_0^N a_k \cdot z^{-k}} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + b_N z^{-N}}$$

می‌توان صورت و مخرج را به صورت زیر نیز نوشت :

$$X(z) = \frac{z^N \sum_0^M b_k \cdot z^{M-k}}{z^M \sum_0^N a_k \cdot z^{N-k}}$$

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_1^M (1 - c_k \cdot z^{-1})}{\prod_1^N (1 - d_k \cdot z^{-1})}$$

$\longrightarrow c_k$: ریشه k ام صورت

$\longrightarrow d_k$: ریشه k ام مخرج

if $(M < N)$

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \implies A_k = (1 - d_k z^{-1}) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

if $(N \leq M)$

$$X(z) = \underbrace{\sum_{r=0}^{M-N} B_r \cdot z^{-r}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}$$

$B_r \, \delta[n-r] \longleftarrow r \neq k \longleftarrow$ B_r : حاصل تقسیم صورت بر مخرج

RSS : $x[n] = \sum_{k=1}^{N} A_k (d_k)^n u[n]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

if ($N < M$ & d_i is repeated root of degree S)

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1-d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^{S} \frac{C_m}{(1-d_i z^{-1})^m}$$

$$C_m = \frac{1}{(S-m)!\,(-d_i)^{S-m}} \left\{ \frac{d^{S-m}}{dw^{S-m}} \left[(1-d_i w)^S X(w^{-1})\right]\right\}_{w=d_i^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

- RSS $\longrightarrow$ ROC: $|z|>1$

$M=N=2 \longrightarrow X(z) = 2 + \dfrac{5z^{-1}-1}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})} = 2 + \dfrac{A}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})} + \dfrac{B}{(1-z^{-1})}$

$A = (1-\frac{1}{2}z^{-1})X(z)\Big|_{z^{-1}=2 \,\,\Rightarrow\,\, z=\frac{1}{2}} = -9$, $B = \dots = 8$

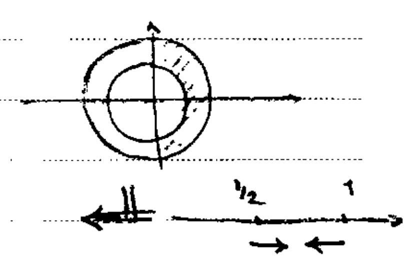
$x[n] = 2\delta[n] + A\,(\frac{1}{2})^n u[n] + B\,u[n]$

- LSS $\longrightarrow$ ROC: $|z| < \frac{1}{2}$

$x[n] = 2\delta[n] - A(\frac{1}{2})^n u[-n-1] - B\,u[-n-1]$

- TSS $\longrightarrow$ ROC: $\frac{1}{2} < |z| < 1$

$x[n] = 2\delta[n] + \underbrace{A(\frac{1}{2})^n u[n]}_{RSS} - \underbrace{B\,u[-n-1]}_{LSS}$



PAPCO

$$X(z) = \frac{1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2\,(1-2z^{-1})\,(1-3z^{-1})} \qquad ROC: \frac{1}{2} < |z| < 2$$

$$= \underbrace{\frac{A_1}{1-2z^{-1}}}_{LSS} + \underbrace{\frac{A_2}{1-3z^{-1}}}_{LSS} + \underbrace{\frac{C_1}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})}}_{RSS} + \underbrace{\frac{C_2}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})^2}}_{RSS}$$

$$A_1 = \frac{1568}{1225}, \quad A_2 = \frac{2700}{1225}, \quad C_1 = \frac{88}{1225}, \quad C_2 = \frac{1}{35}$$

$$x[n] = -A_1 2^n u[-n-1] - A_2 3^n u[-n-1] + C_1 (-\tfrac{1}{2})^n u[n] + C_2 (n+1)(-\tfrac{1}{2})^{n+1} u[n+1]$$

*

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) \longrightarrow x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)\cdot z^{n-1}\cdot dz$$

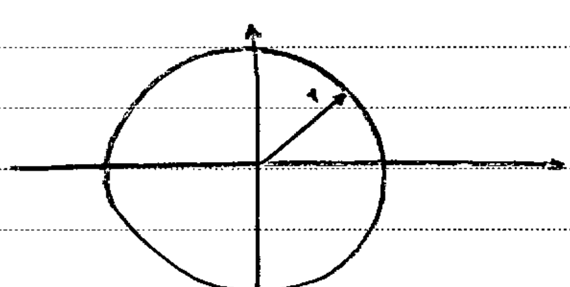
این انتگرال در ناحیه ROC همگرا است.

* پایداری و علیت

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

$$\mathcal{Z}\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]\cdot z^{-n}| \Rightarrow |z| = 1$$

⇐ سیستمی پایدار است که ناحیه همگرایی تبدیل Z ، دایره واحد را در بر بگیرد.



⇐ علیت

RSS: قطبهای H(z) باید داخل دایره باشد

LSS: قطبهای H(z) باید خارج دایره باشد

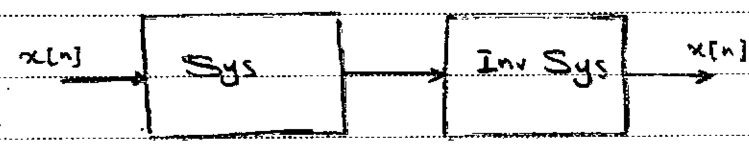
 $h[n] = 0 \quad \forall n < 0 \Rightarrow$ علی

Realizable Sys. *

• قابل ساختن در آزمایشگاه

• علی و پایدار

Inverse System *



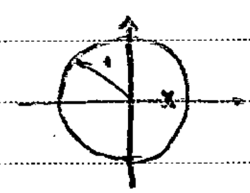
$h[n]$ $h_I[n]$ $h_{overall}[n] = h[n] * h_I[n]$.

$$H_{overall}(z) = H(z) \cdot H_I(z) = 1 \implies H_I(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \quad ROC: |z| > 0.8$$

$$H_I(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{1-0.5z^{-1}}$$

پایدار $\Leftarrow$



R.S.S : $|z| > 0.5$ ✓

L.S.S : $|z| < 0.5$ ✗ $\Longrightarrow$ چون دو Sys سری هستند باید ROC آنها مشترک باشد

↳ اشتراک آنها تهی نباشد.

$$h_I[n] = (0.5)^n u[n] - 0.8(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

$$H(z) = \frac{0.5 - z^{-1}}{1-0.8z^{-1}} \quad ROC: |z| > 0.8$$

$$H_I(z) = \frac{1-0.8z^{-1}}{0.5 - z^{-1}}$$

→ $|z| > 2$ ✓ → پایدار علی

→ $|z| < 2$ ✓ → پایدار غیرعلی

ولی به خاطر ROC مشترک هر دو قابل قبول است